

Aufgabe
Bitte berechnen Sie die mittlere Verweilzeit einer zwei-stufigen Kaskade!

$\bar{t} = \int_0^{\infty} tE(t)dt$

$E(t) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$E(t) = \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$ **zweistufige Kaskade n=2**

$\bar{t} = \int_0^{\infty} t \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$

$\bar{t} = ?$

Leibniz Universität Hannover | Bernd Hitzmann | TCI Institut für Technische Chemie

$\bar{t} = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$ **Tabellenwerk (z. B. Bronstein) } langweilig**
Maple, Mathematica,

partielle Integration

$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

Beide Integrale auf die selbe Seite $uv = \int uv'dx + \int u'vdx$

Ableiten ergibt: $(uv)' = uv' + u'v$ **Produktregel der Ableitung**

Leibniz Universität Hannover | Bernd Hitzmann | TCI Institut für Technische Chemie

$\bar{t} = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$ **partielle Integration** $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

$u = \frac{t^2}{\tau^2}$ $u' = 2 \frac{t}{\tau^2}$

$v' = e^{-\frac{t}{\tau}}$ $v = -\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\bar{t} = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{t^2}{\tau^2} \left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2 \frac{t}{\tau^2} \left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt$

$\bar{t} = -\frac{t^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -(\infty^2 e^{-\infty} - 0^2 e^0) + \int_0^{\infty} 2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$

$\bar{t} = \int_0^{\infty} 2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$

$\bar{t} = \int_0^{\infty} 2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$ **partielle Integration** $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

$u = 2 \frac{t}{\tau}$ $u' = \frac{2}{\tau}$

$v' = e^{-\frac{t}{\tau}}$ $v = -\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\bar{t} = \int_0^{\infty} 2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{2t}{\tau} \left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{2}{\tau} \left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt$

$\bar{t} = -\frac{2t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2 e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -(0-0) + \int_0^{\infty} 2 e^{-\frac{t}{\tau}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$

$\bar{t} = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = 2 \left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Big|_0^{\infty} = 2(-\tau)(0-1)$ **$\bar{t} = 2\tau$**
mittlere Verweilzeit der zweistufigen Kaskade