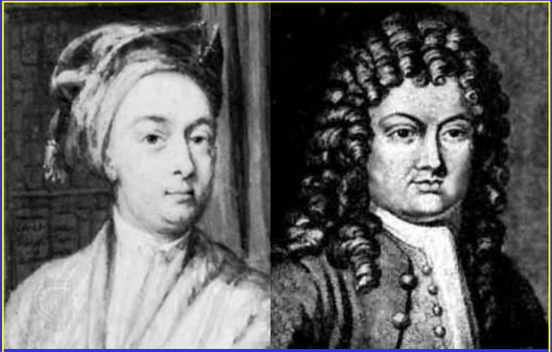
Ein Verfahren zur Approximation von Funktionen

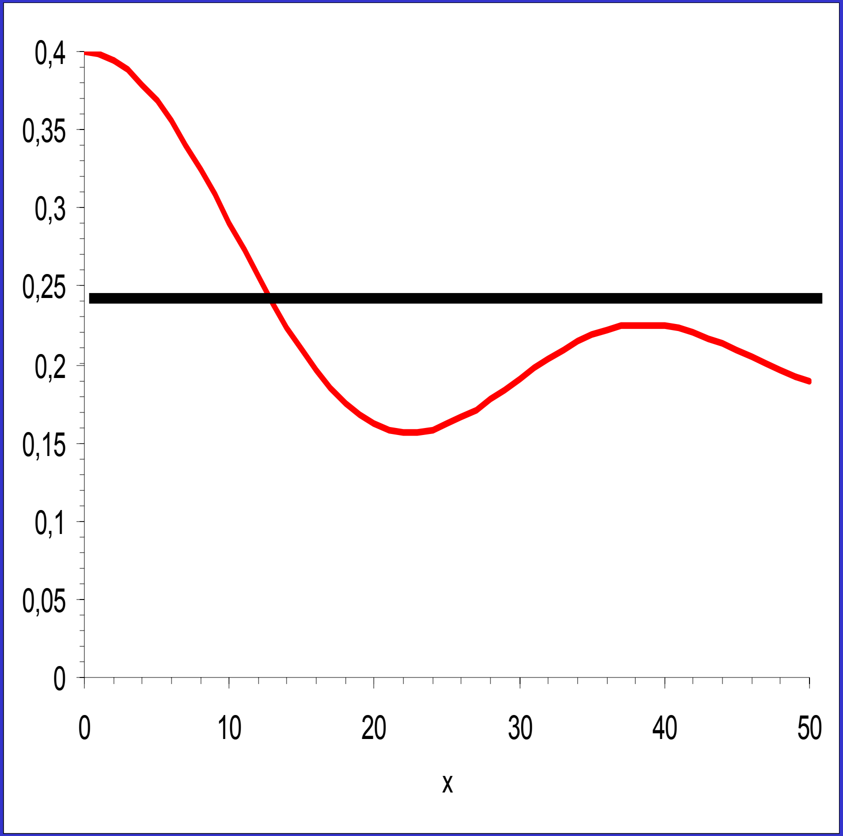
Die Taylor-Reihenentwicklung



Brook Taylor
1685-1731

Bernd Hitzmann

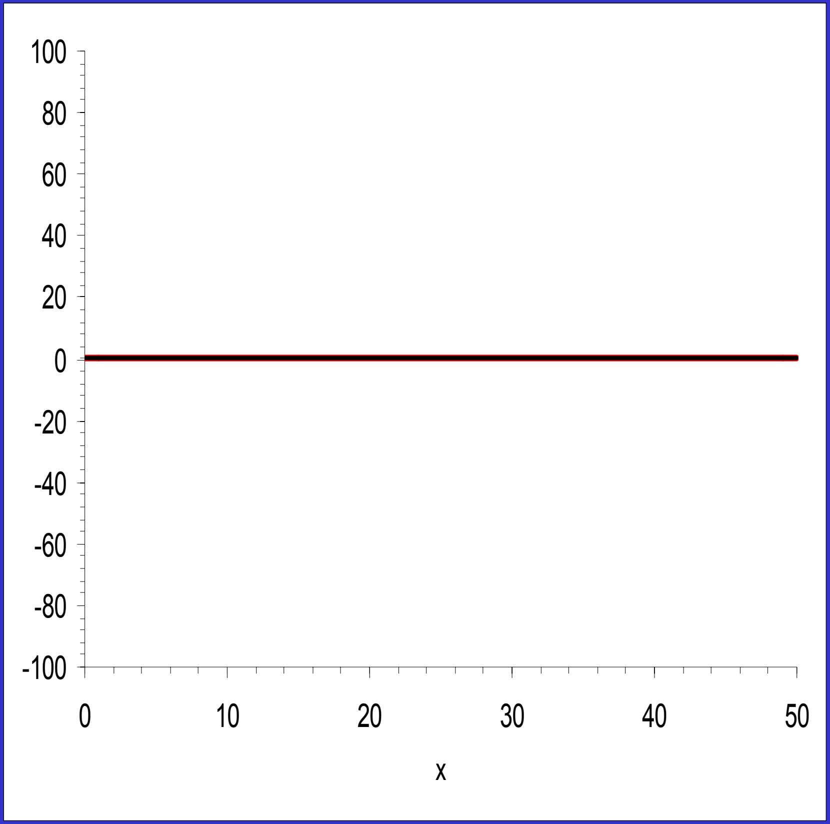
Ein Verfahren zur Approximation von Funktionen



Bernd Hitzmann

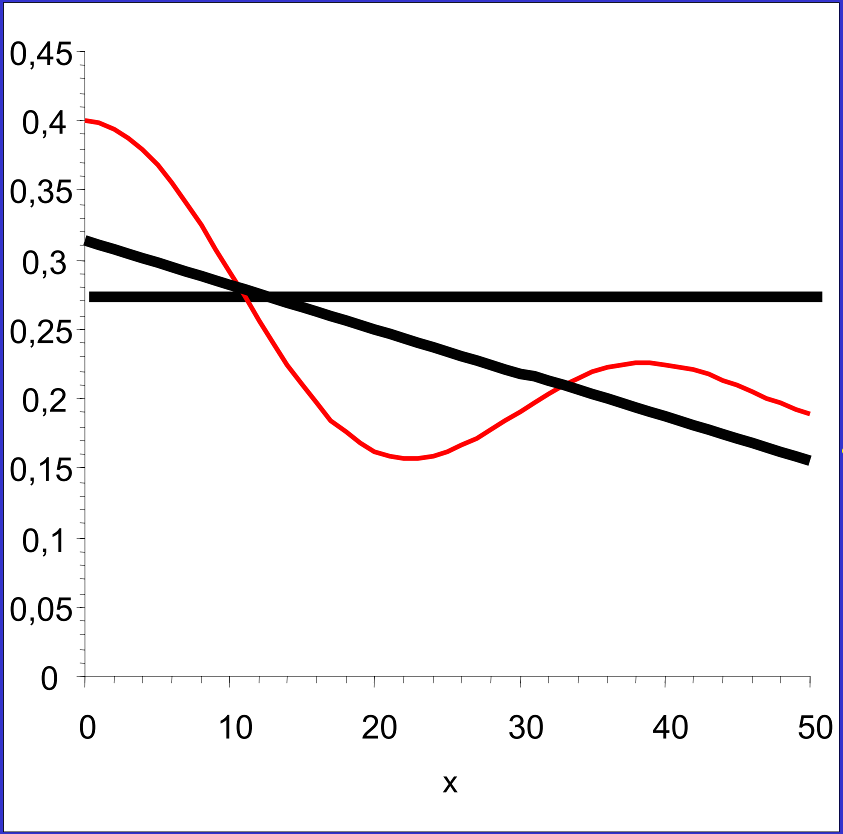
Beschreibung der Funktion im Intervall [0,50]

Eine Frage des Standpunkts?



Bernd Hitzmann

Beschreibung der Funktion im Intervall [0,50]



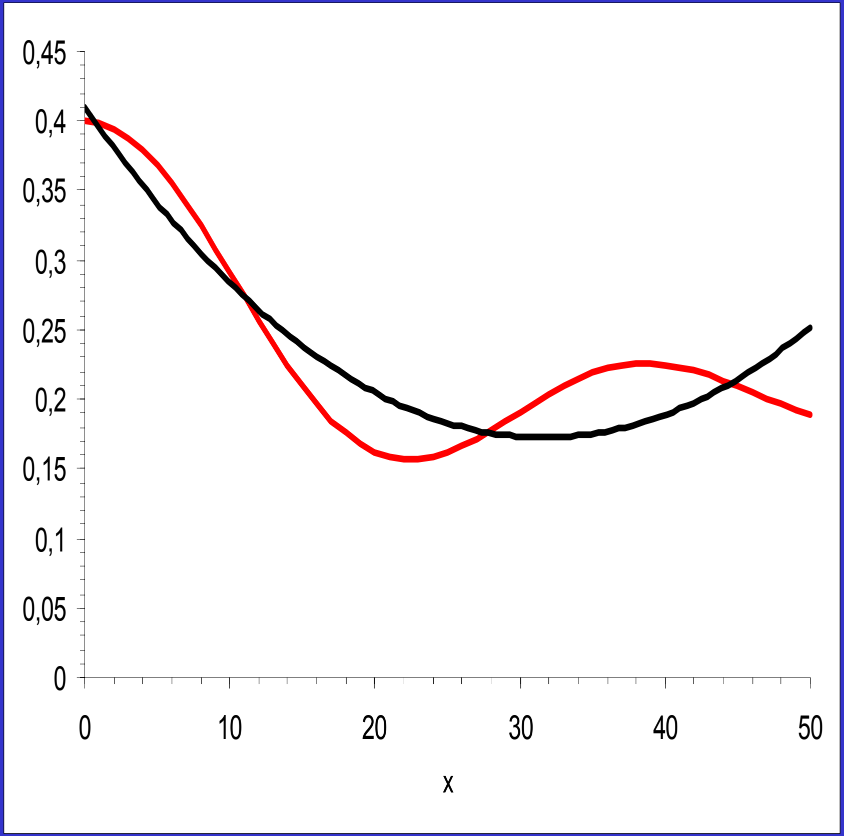
$f_0(x)=k$

$f_1(x)=mx+b$
$=b_0+b_1x$

Bernd Hitzmann

Beschreibung der Funktion im Intervall [0,50]

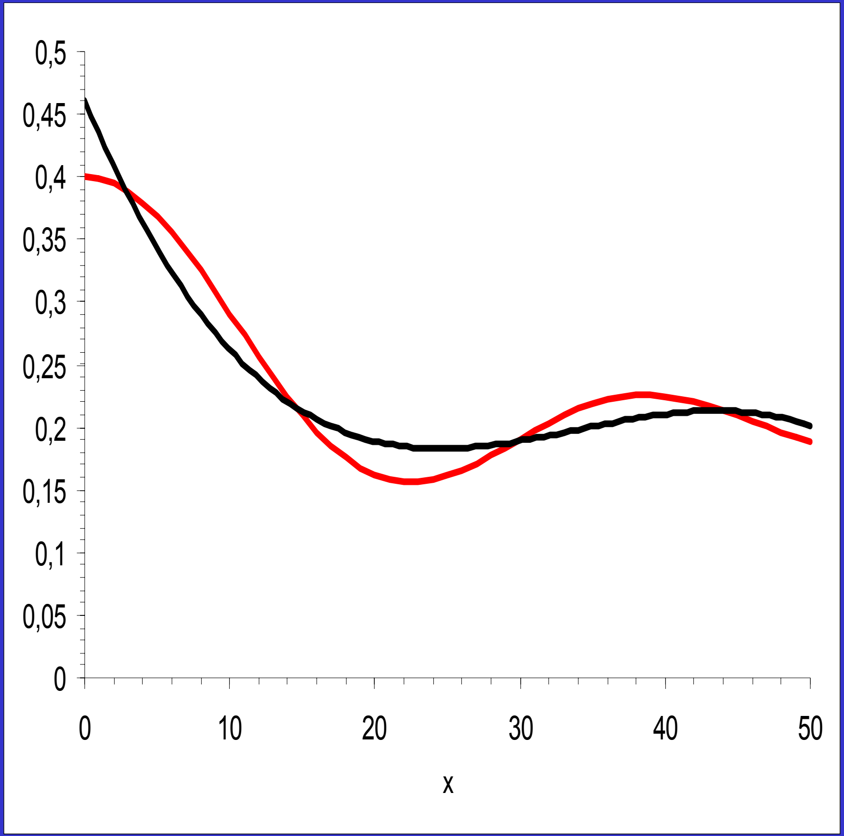
$$f_2(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$$



Bernd Hitzmann

Beschreibung der Funktion im Intervall [0,50]

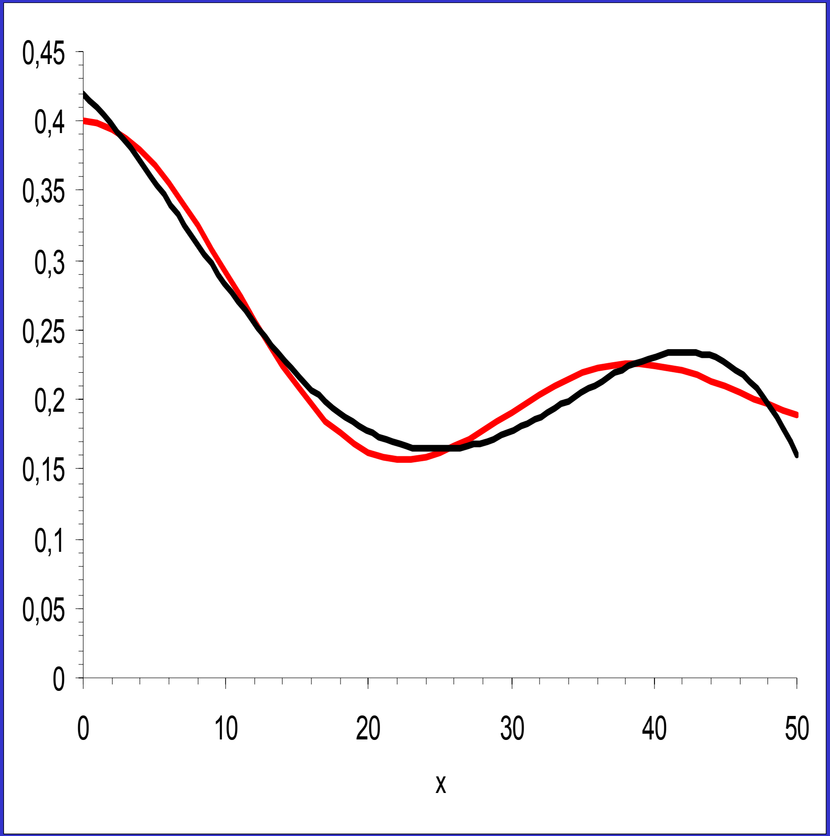
$$f_3(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$$



Bernd Hitzmann

Beschreibung der Funktion im Intervall [0,50]

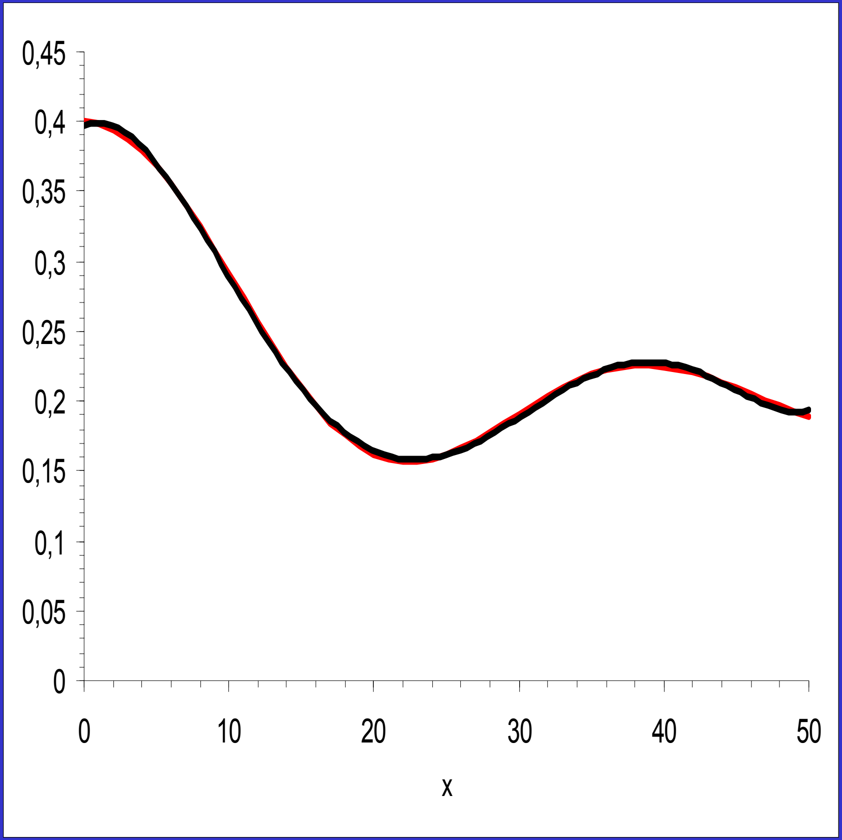
$$f_4(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4$$



Bernd Hitzmann

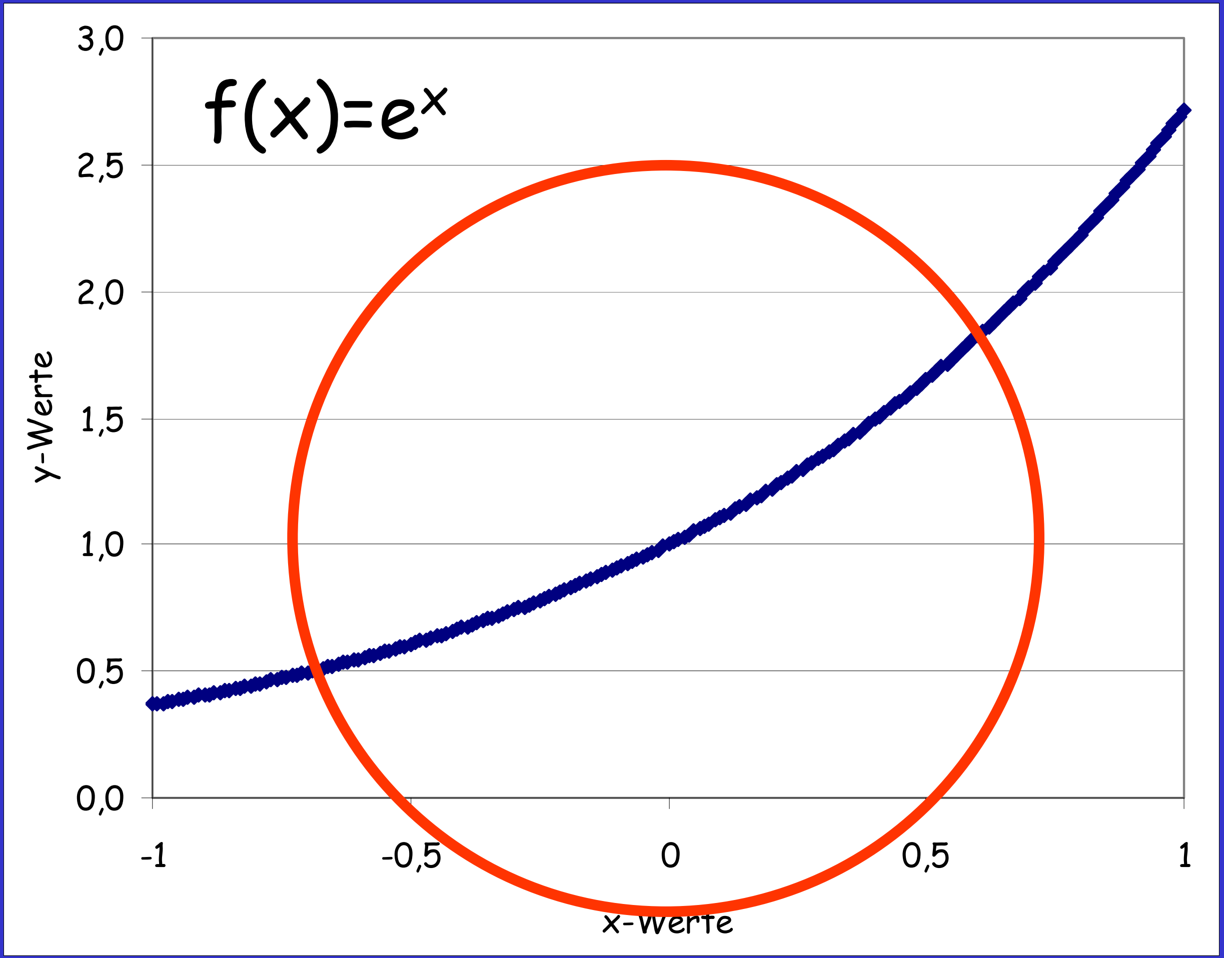
Beschreibung der Funktion im Intervall [0,50]

$$f_6(x)=\sum_{i=0}^{6} b_i * x^i$$



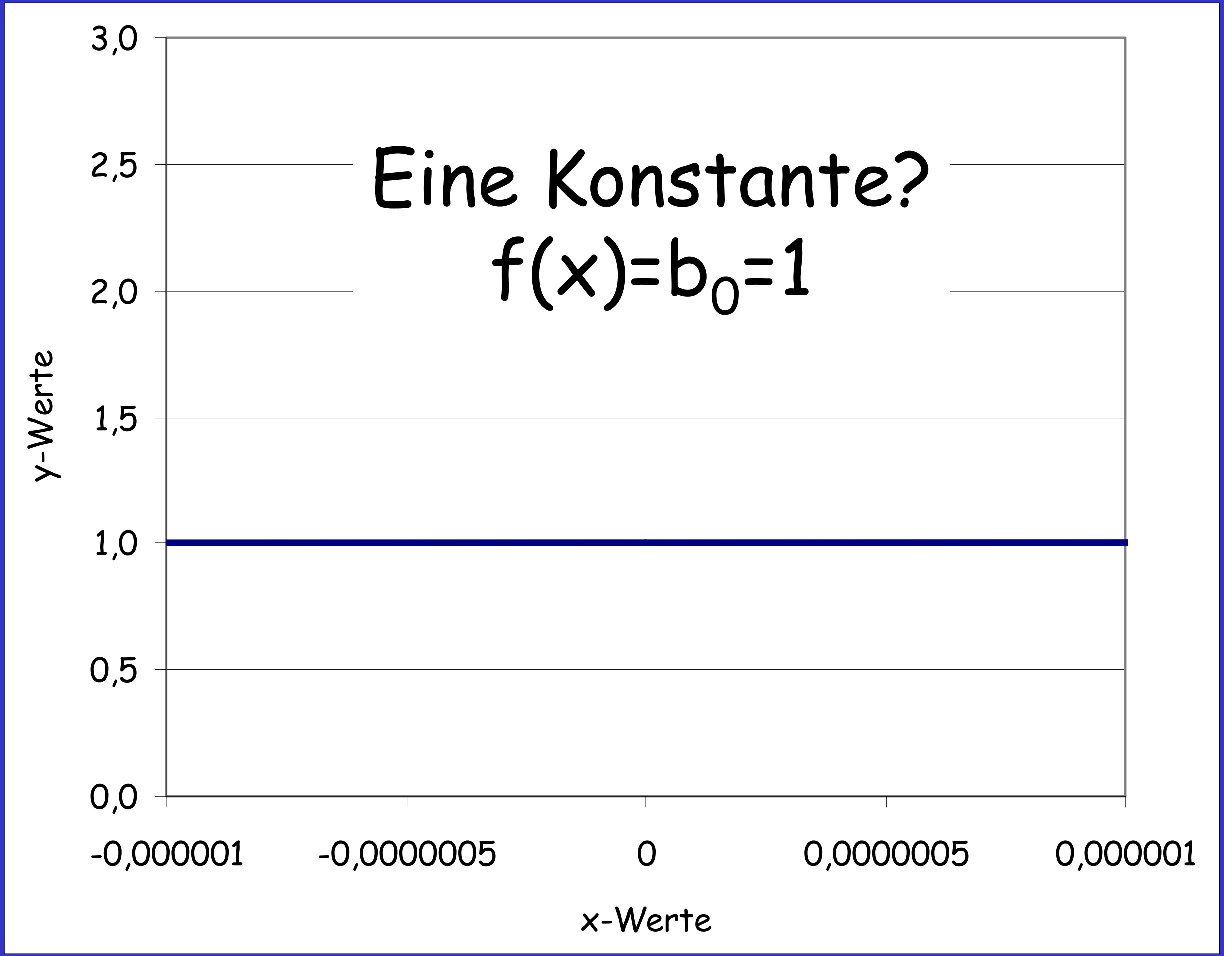
Bernd Hitzmann

Betrachtung der e-Funktion um den Nullpunkt (x=0)

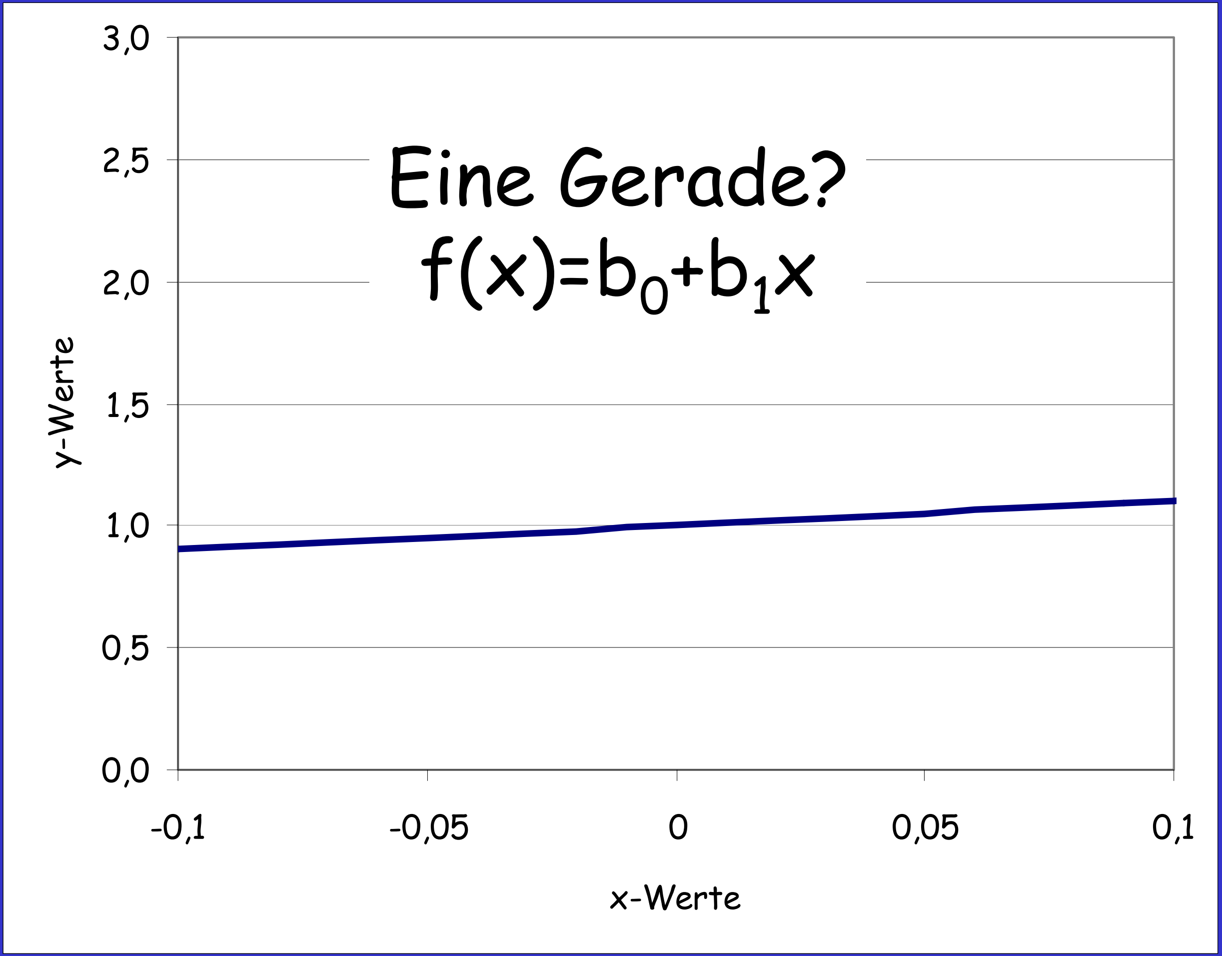


Bernd Hitzmann

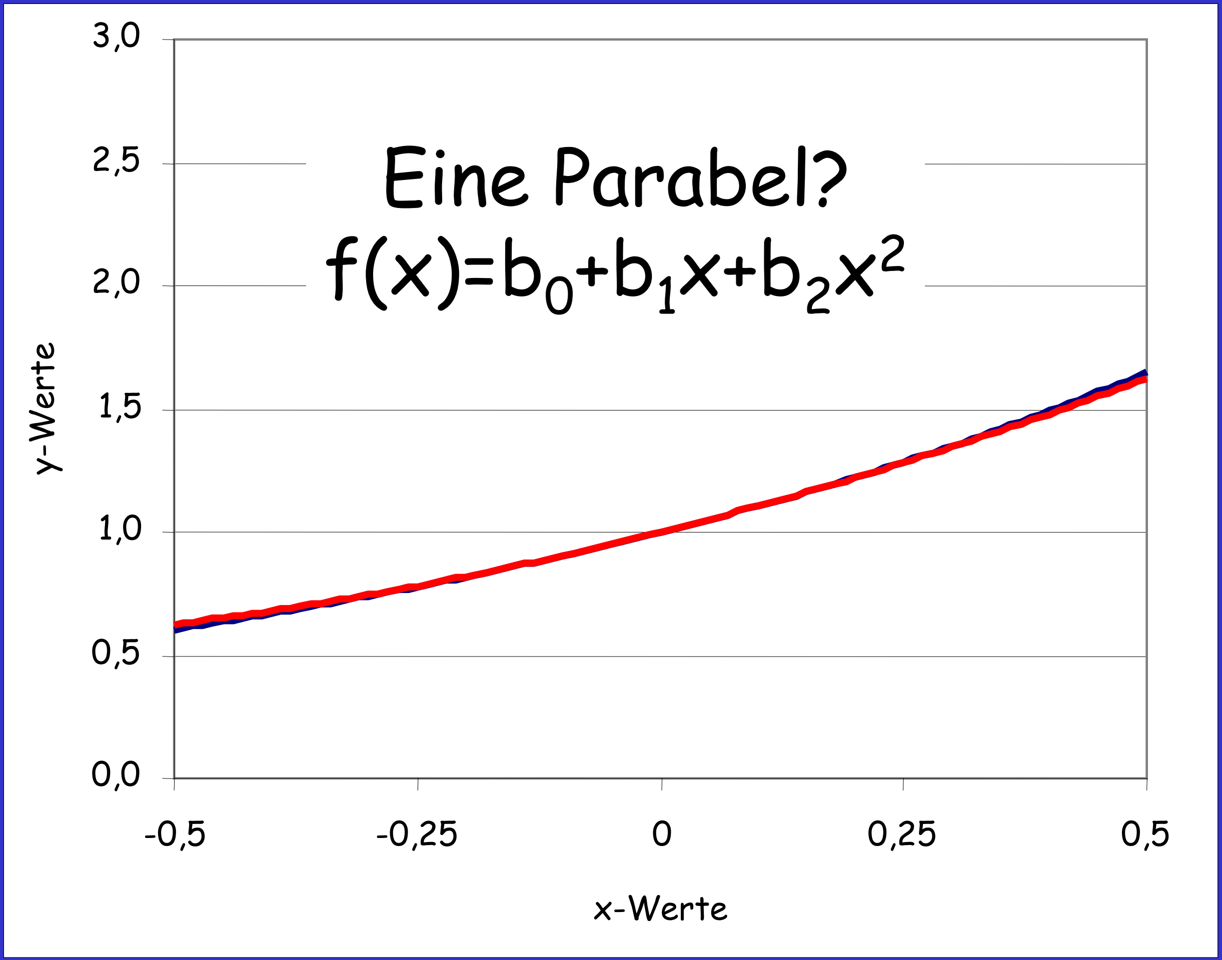
Betrachtung der e-Funktion um den Nullpunkt (x=0)



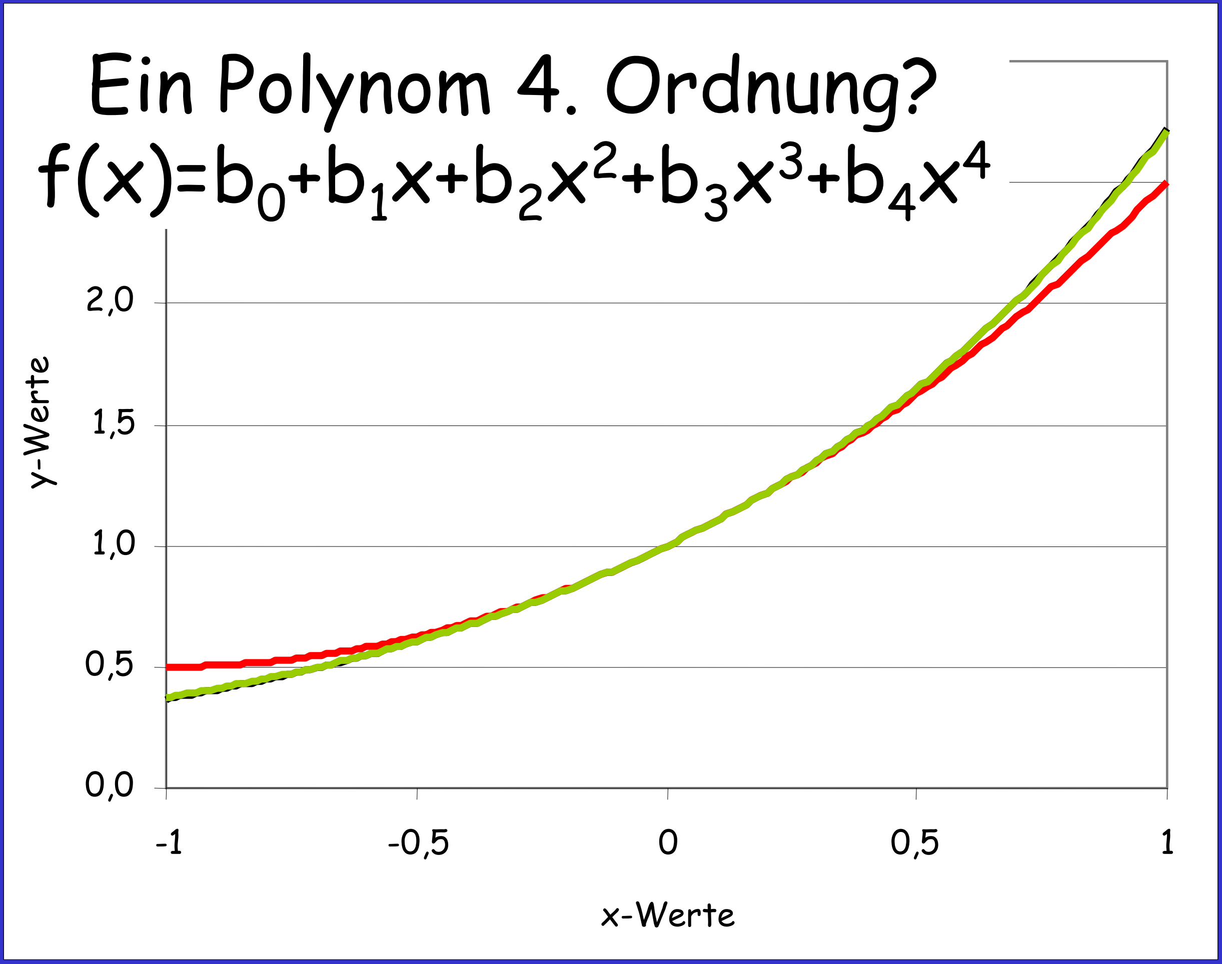
Betrachtung der e-Funktion um den Nullpunkt (x=0)



Betrachtung der e-Funktion um den Nullpunkt (x=0)



Betrachtung der e-Funktion um den Nullpunkt (x=0)



Bernd Hitzmann

Beobachtung:

Wenn $|x|<0{,}000001$ $\longrightarrow$ $e^x \approx 1$

Wenn $|x|<0{,}1$ $\longrightarrow$ $e^x \approx 1+b_1x$

Wenn $|x|<0{,}5$ $\longrightarrow$ $e^x \approx 1+b_1x+b_2x^2$

Wenn $|x|<1{,}0$ $\longrightarrow$ $e^x \approx \sum_{i=0}^{4} b_i x^i$

Bernd Hitzmann

Sei $|x|<1,0$

Approximation um den Nullpunkt

$$e^x \approx b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4$$

Wie berechnet man b_0, b_1, b_2, b_3 und b_4?

Bernd Hitzmann

Sei $|x|<1,0$ Approximation um den Nullpunkt $e^0=1$

$$e^x \approx b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4 \xrightarrow{x=0} 1=b_0$$

$$(e^x)'=e^x \approx b_1+2b_2x+3b_3x^2+4b_4x^3 \qquad 1=b_1$$

$$(e^x)''=e^x \approx 2b_2+3*2*b_3x+4*3*b_4x^2 \qquad 1=2b_2$$

$$(e^x)'''=e^x \approx 3*2*b_3+4*3*2*b_4x \qquad 1=3*2*b_3$$

$$(e^x)''''=e^x \approx 4*3*2*b_4 \qquad 1=4*3*2*b_4$$

$$e^x \approx 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3*2}x^3+\frac{1}{4*3*2}x^4$$

Bernd Hitzmann

Sei $|x|<1,0$ Approximation um den Nullpunkt

$$e^x = \dots\dots\dots \qquad f(x) \xrightarrow{x=0} 1=b_0$$

$$(e^x)' = \dots\dots\dots \qquad f'(x) \xrightarrow{x=0} 1=b_1$$

$$(e^x)'' = \dots\dots\dots \qquad f''(x) \xrightarrow{x=0} 1=2b_2$$

$$(e^x)''' = \dots\dots\dots \qquad f'''(x) \xrightarrow{x=0} 1=3*2*b_3$$

$$(e^x)'''' = \dots\dots\dots \qquad f''''(x) \xrightarrow{x=0} 1=4*3*2*b_3$$

$$e^x \approx 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3*2}x^3+\frac{1}{4*3*2}x^4$$

Bernd Hitzmann

Sei $|x|<1{,}0$ Approximation um den Nullpunkt

$$e^x \approx 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3*2}x^3+\frac{1}{4*3*2}x^4$$

$$f(x) \xrightarrow{x=0} 1=b_0$$

$$f'(x) \xrightarrow{x=0} 1=b_1$$

$$f''(x) \xrightarrow{x=0} 1=2b_2$$

$$f'''(x) \xrightarrow{x=0} 1=3*2*b_3$$

$$f''''(x) \xrightarrow{x=0} 1=4*3*2*b_3$$

$$e^x \approx f(x)|_{x=0} + \frac{f'(x)|_{x=0}}{1}x+\frac{f''(x)|_{x=0}}{1*2}x^2+\frac{f'''(x)|_{x=0}}{1*2*3}x^3+\frac{f''''(x)|_{x=0}}{1*2*3*4}x^4$$

Bernd Hitzmann

Gegeben sei eine Funktion f(x), die um einem Punkt $x=x_E$ angenähert werden soll!

Approximation mit Taylor-Reihenentwicklung n. Ordnung!

Allgemeine Formel

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{\boxed{f^{(i)}(x)\big|_{x=x_E}}}{\boxed{i!}}(x-x_E)^i$$

i. Ableitung der Funktion an der Stelle x_E
0. Ableitung=f(x)

Fakultät von i
0!=1
4!=1*2*3*4

Bernd Hitzmann

Beispiele für Entwicklungspunkt $x_E=0$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2*4}x^2 + \frac{1*3}{2*4*6}x^3 - \ldots\ldots$$

$$e^x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$x = 0{,}1$
$x^2 = 0{,}01$
$x^3 = 0{,}001$
$x^4 = 0{,}0001$

Nutzen:

$$\sqrt{\frac{e^x\left[1+\sin(x)\right]}{(x+1)^2} + x} \approx \sqrt{\frac{(1+x)\left[1+x\right]}{(x+1)^2} + x}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2}x$$

Bernd Hitzmann

Taylor-Reihenentwicklung

Nutzen: Vereinfachung komplizierter Formeln!

In erster Näherung kann eine unbekannte Funktion durch eine Gerade angenähert werden:

$$f(x) \approx f(x_E) + f'(x)|_{x_E}(x-x_E)$$

$$y = \quad b \quad + \quad m \quad x$$

$$m = f'(x)|_{x_E}$$

$$b = f(x_E) - f'(x)|_{x_E} x_E$$

Bernd Hitzmann