Isaac Newton (1642-1727)

Bernd Hitzmann

Gegeben: $f(x)=x^2+px+q$

Gesucht: x_N mit $f(x_N)=0=x_N^2+px_N+q$

Lösung: $\boxed{x_{N1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$ einfach!

Gegeben: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

Gesucht: x_N mit $f(x_N)=0$

Lösung: $\boxed{x_N = \ldots\ldots\ldots\ldots}$ kompliziert!

Bernd Hitzmann

Gegeben: $f(x)=x+\sin x$

Gesucht: x_N mit $f(x_N)=0$

Lösung: analytisch nicht möglich!

Numerisches Verfahren gefordert!

Das Newton-Verfahren

Ein Verfahren zur numerischen Berechnung von Nullstellen x_N.

$$f(x_{Nullstelle})=0$$

Newton

Taylor

Bernd Hitzmann

Gegeben: $f(x)$

Gesucht: x_N mit $f(x_N)=0$

Taylor: $f(x) \approx f(x_E) + f'(x_E)(x-x_E)$

Grober Schätzwert für x_N vorhanden!

$x_N \approx x_0$ (aber nicht genau)

$$\xrightarrow[x_E=x_0]{\text{Taylor}} \quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_N - x_0) = 0$$

$$\longrightarrow \quad x_5 = x_4 - f(x_4)/f'(x_4)$$

$$\longrightarrow \quad x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$$

Bernd Hitzmann

Das Newton-Verfahren

Ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen: $\boxed{x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)}$

Schätzwert x_0

$\rightarrow$ $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$

$x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$

$x_3=x_2-f(x_2)/f'(x_2)$

....

....

$x_n=x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$

iterativ

Bernd Hitzmann

Das Newton-Verfahren

Ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen: $\boxed{x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)}$

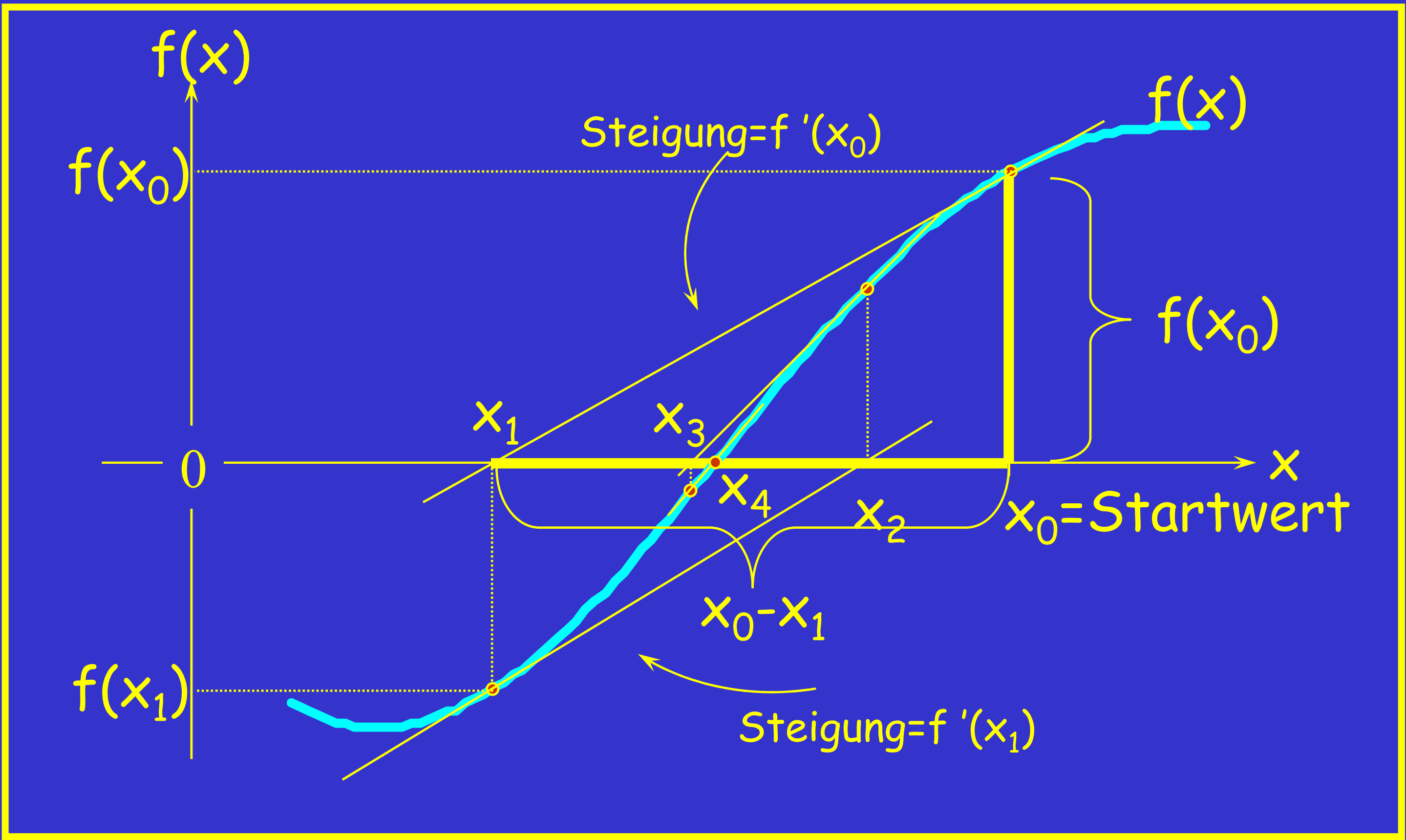
Startwert x_0

Abbruchkriterium

1) $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$
2) Maximale Anzahl Iterationen

Bernd Hitzmann

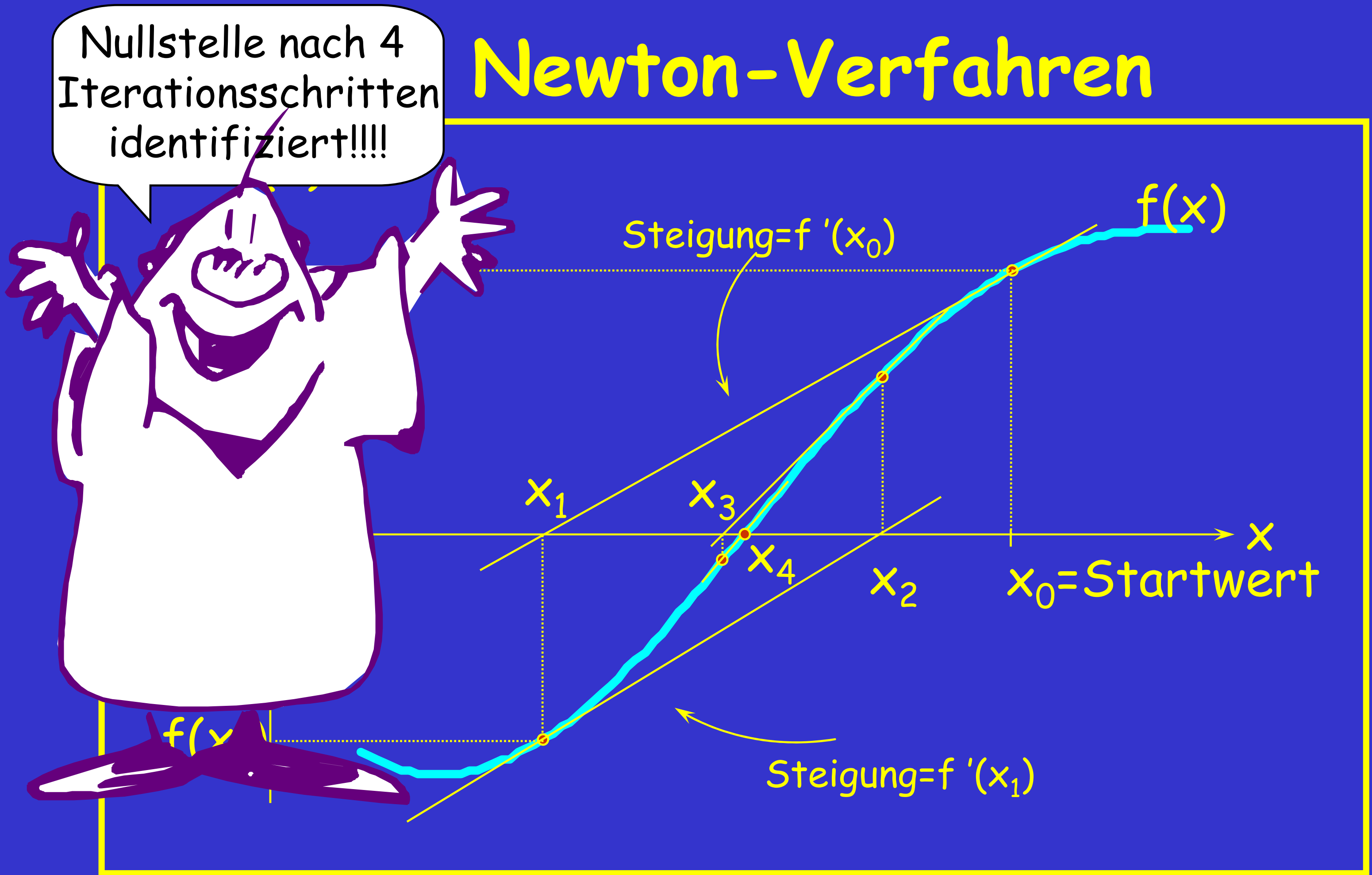
Das Newton-Verfahren



$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Leftrightarrow f(x_3) = f'(x_3)x_3 - f'(x_3)x_4 \Leftrightarrow f'(x_3) = \frac{f(x_3)}{x_3 - x_4}$$

Bernd Hitzmann

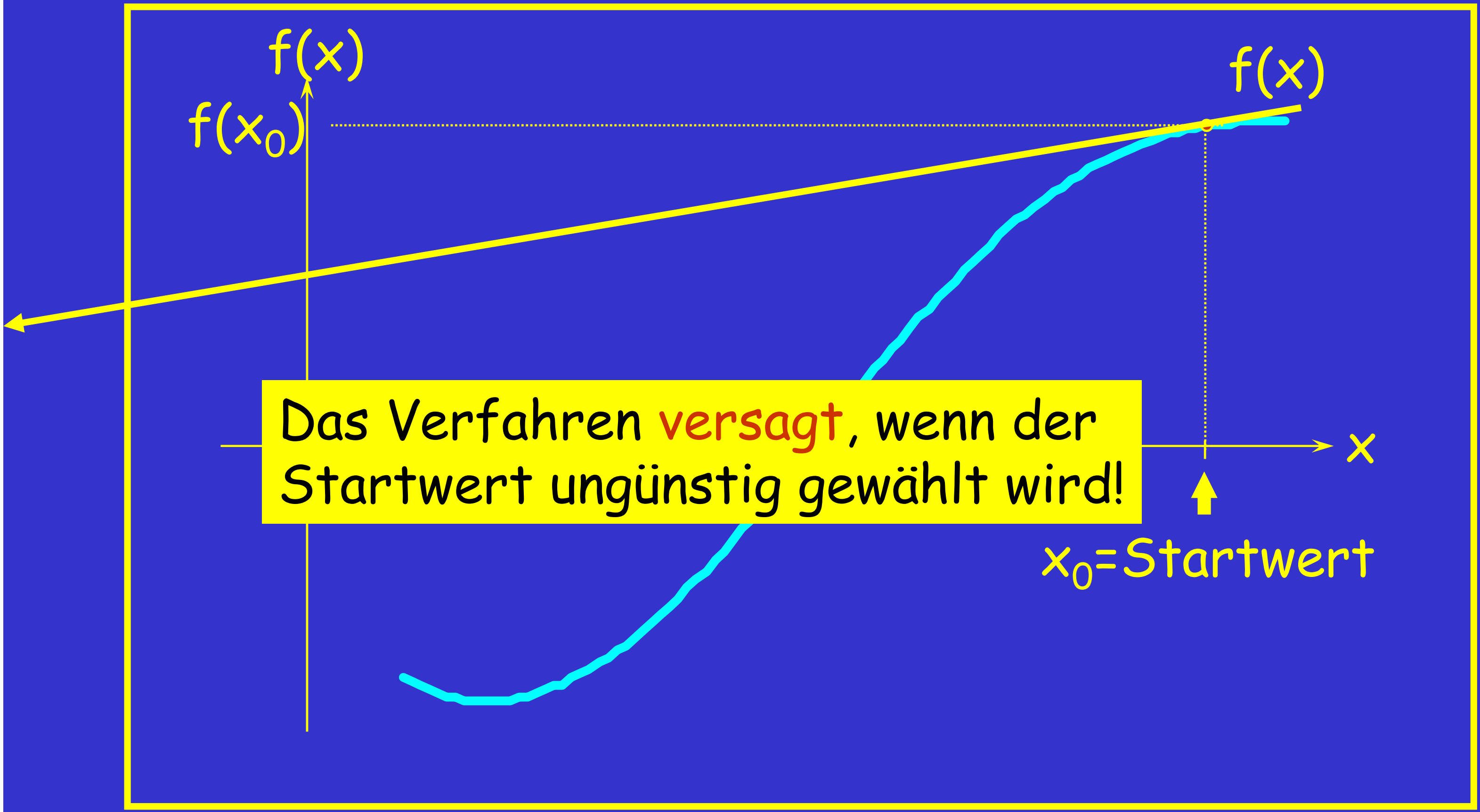
Newton-Verfahren



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Leftrightarrow f(x_i) = f'(x_i)x_i - f'(x_i)x_{i+1} \Leftrightarrow f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Bernd Hitzmann

Das Newton-Verfahren



Das Verfahren versagt, wenn der Startwert ungünstig gewählt wird!

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Leftrightarrow f(x_i) = f'(x_i)x_i - f'(x_i)x_{i+1} \Leftrightarrow f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Bernd Hitzmann

Gesucht: $\sqrt{a} =$?

äquivalent

$$\sqrt{a} = x \longleftrightarrow a = x^2 \longleftrightarrow 0 = x^2 - a$$

$$f(x) = x^2 - a$$

Gesucht ist die Nullstelle von f(x)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\boxed{x_i^2 - a}}{\boxed{2x_i}}$$

Funktion

Ableitung

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i}{2} + \frac{a}{2x_i}$$

Bernd Hitzmann