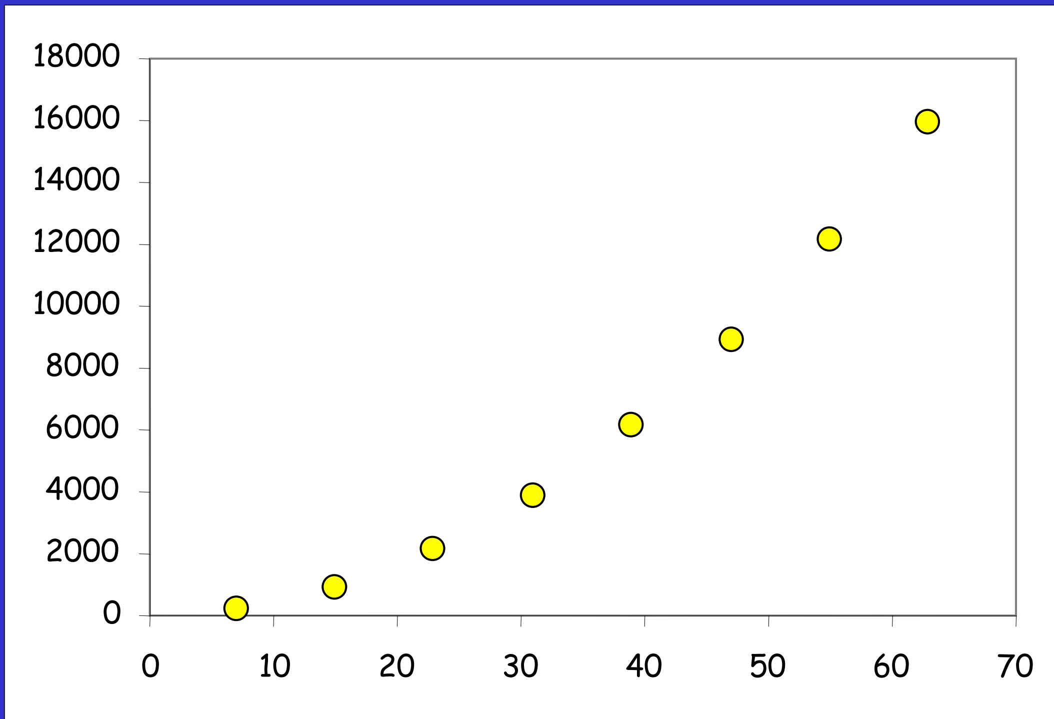
Anpassung einer Funktion an Messwerte

Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Bernd Hitzmann

Messwerte einer Größe wurden bestimmt!



Zeit [min]	Messwerte
t_1	m_1
t_2	m_2
t_3	m_3
t_4	m_4
.	.
.	.
.	.
t_n	m_n

Funktion zur Beschreibung der Messwerte ist gesucht!

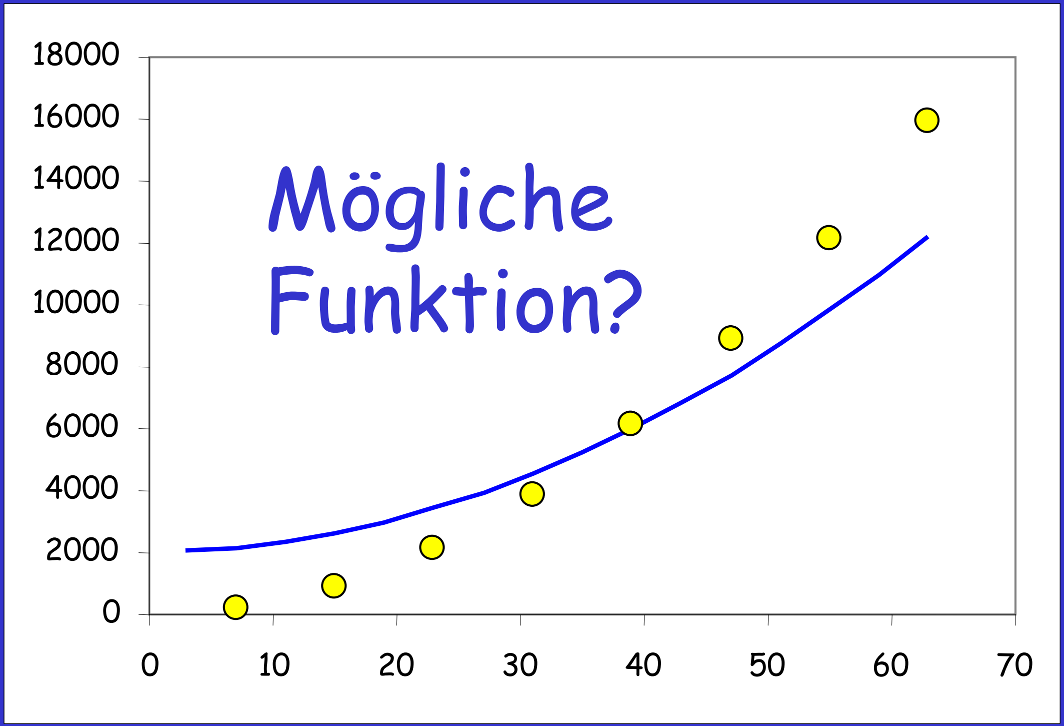
$m_i \approx f(t_i, a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots)$

t_i=unabhäng. Variable

a_j=Modellparameter

Bernd Hitzmann

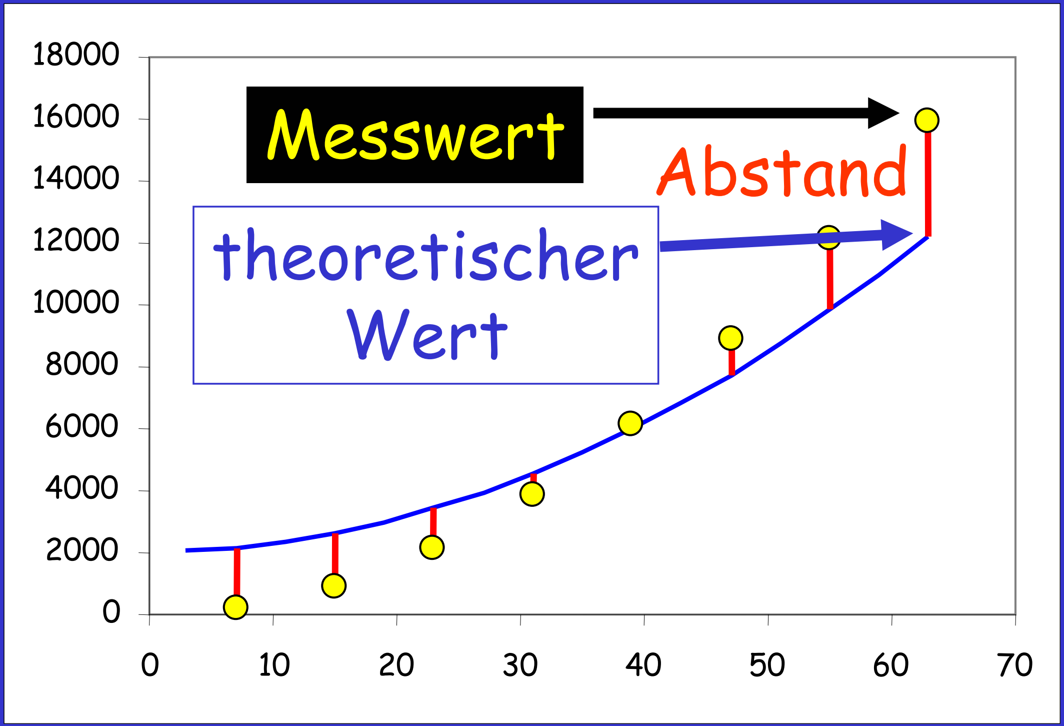
Messwerte einer Größe wurden bestimmt!



Die dargestellte Funktion (das theoretische Modell) beschreibt die Messwerte nur unzureichend!

Bernd Hitzmann

Messwerte einer Größe wurden bestimmt!



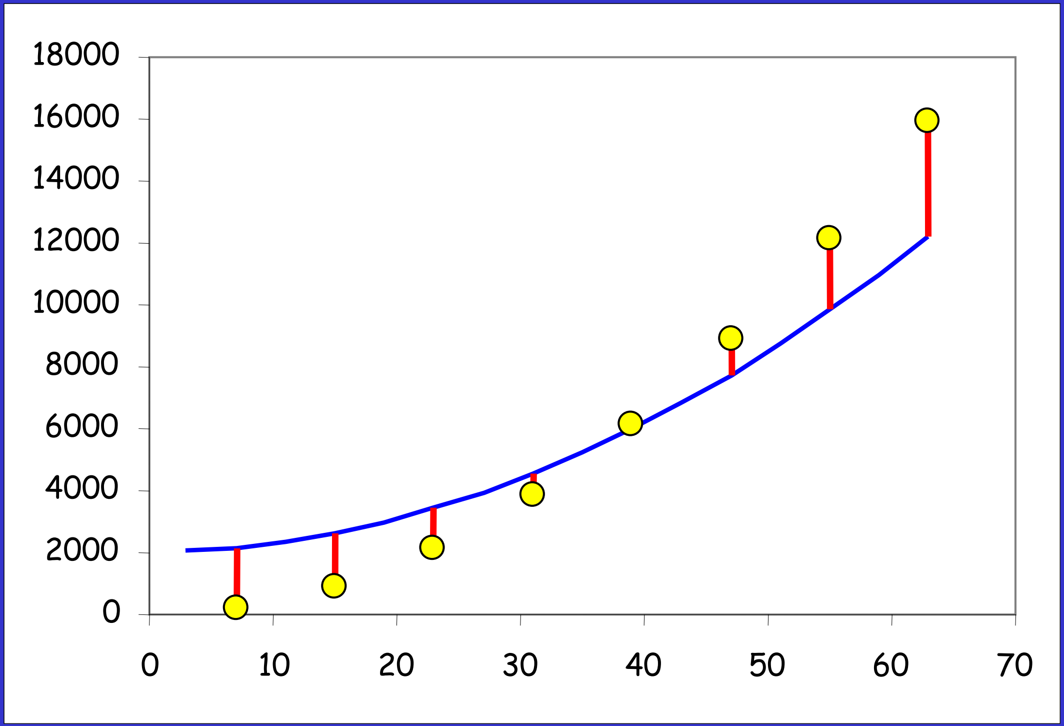
Gütekriterium:

Abstand von theoretischen Werten und Messwerten

Große Abweichung des Modells von den Messwerten

Bernd Hitzmann

Messwerte einer Größe wurden bestimmt!



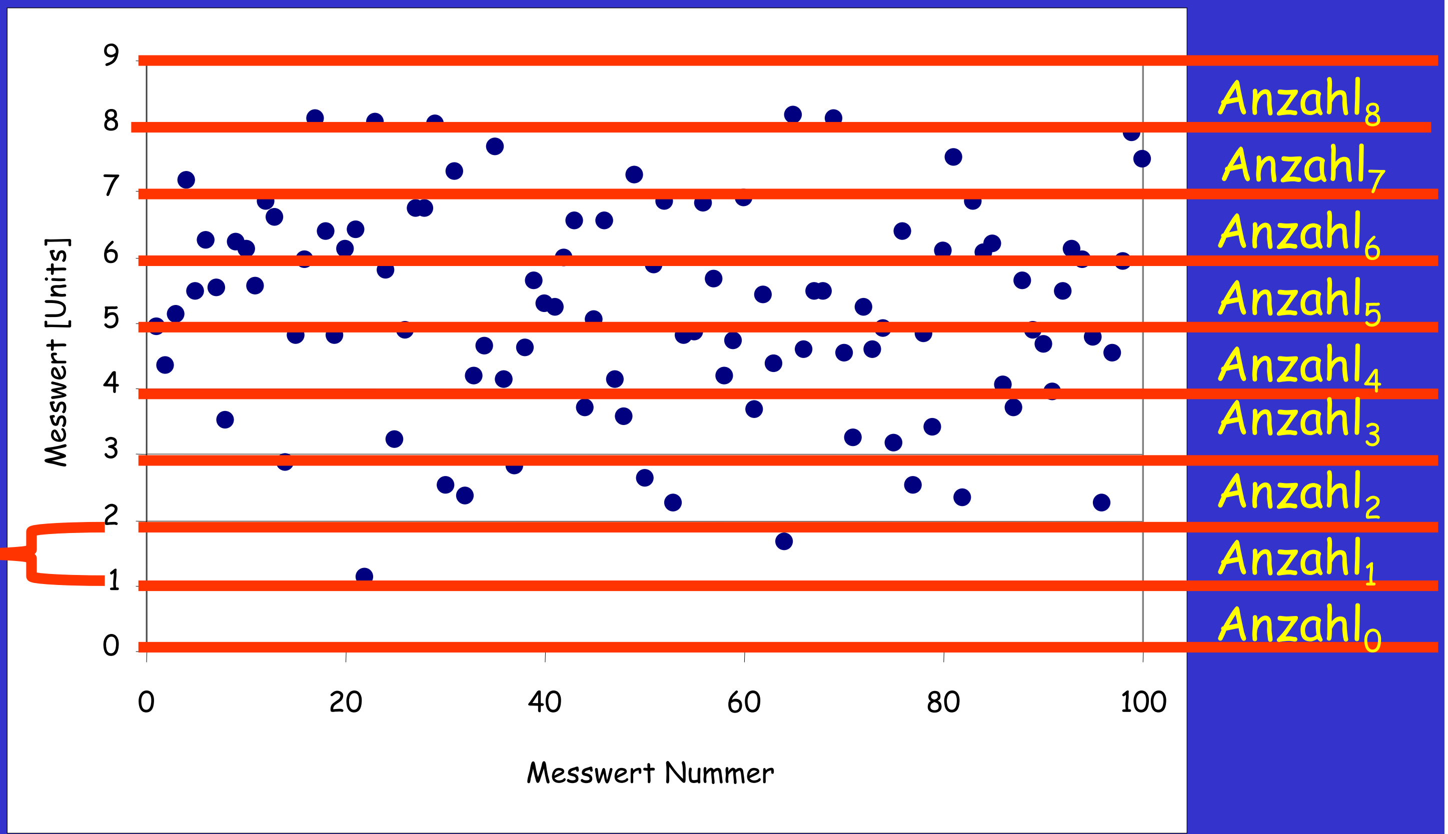
Der Abstand zwischen Messwerten und Modellwerten soll natürlich klein sein !

Wie gut oder schlecht ist überhaupt ein Messwert?

→ Mehrfachmessungen

Bernd Hitzmann

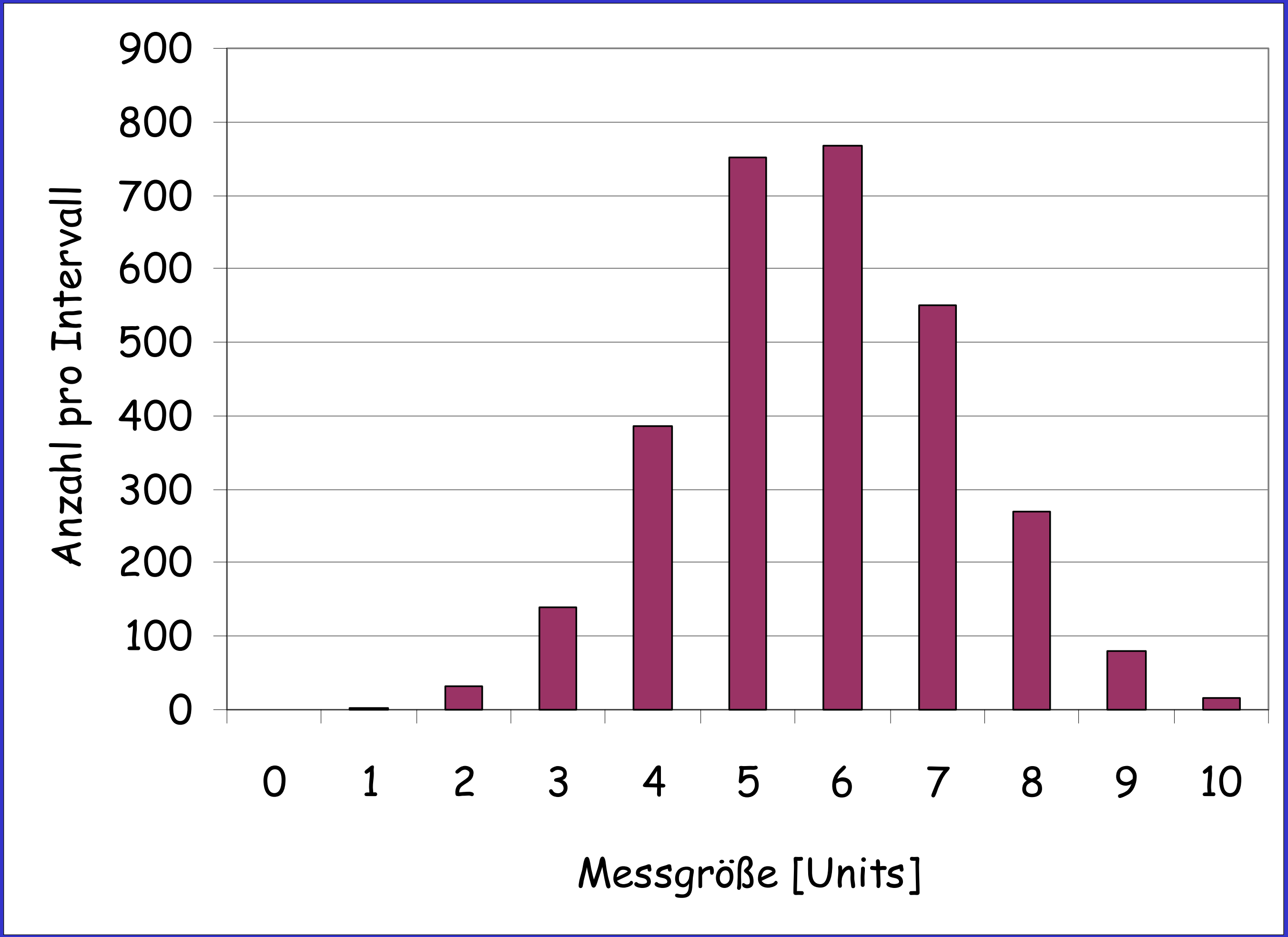
Die ersten hundert Messwerte von insgesamt 3000 Mehrfachmessung (=eine Größe 3000 gemessen)



Anzahl der Messwerte, die in dem Intervall vorkommen (Δm=1 Unit)!

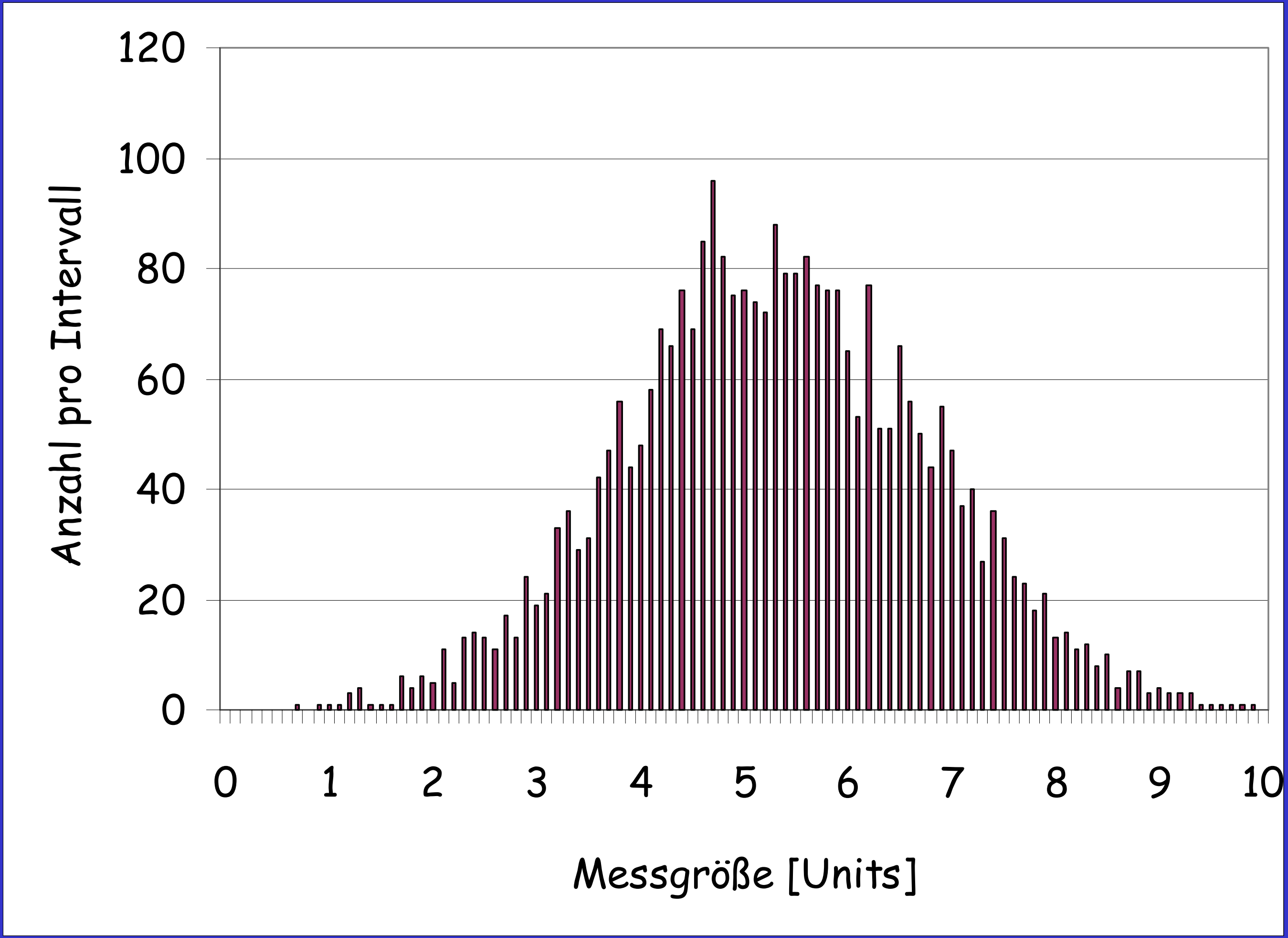
Bernd Hitzmann

Intervallbreite Δm=1 unit folgt:



Bernd Hitzmann

Wenn Intervallbreite Δm=0,1 units folgt:



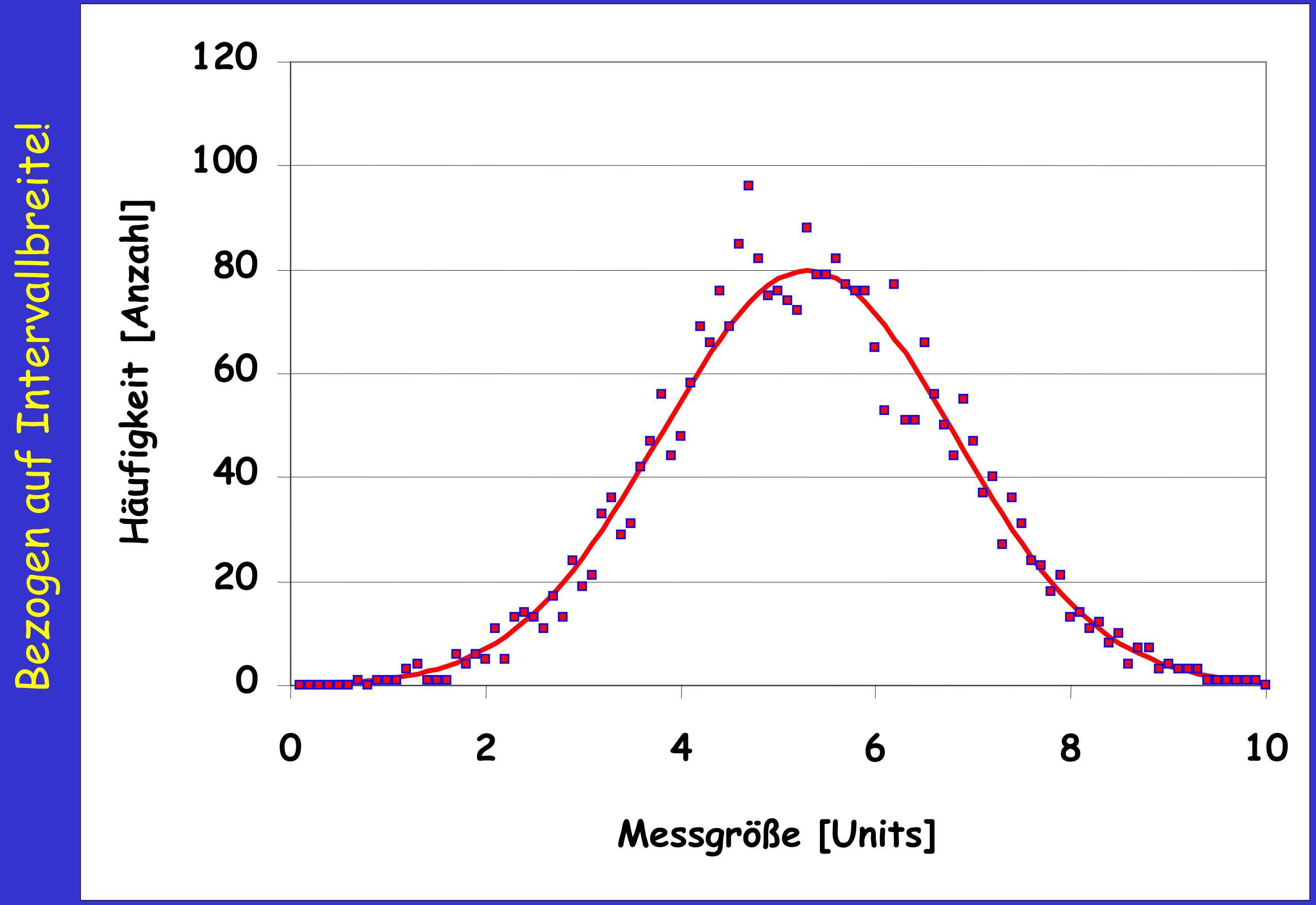
Wenn Intervallbreite $\Delta m \rightarrow 0$ units
und Anzahl der Messwerte $\rightarrow \infty$ folgt

eine ideale Verteilung der Messwerte!

Übertragen auf die Intervallbreite
von $\Delta m = 0{,}1$ units erhält man:

Bernd Hitzmann

Reale und ideale Häufigkeitsverteilung für Intervallbreite Δm=0,1 units



Bernd Hitzmann

Wird die erhaltene Funktion normiert

$$G(m) = \frac{H(m)}{\int\limits_{\text{alle Messwerte}} H(m)\,dm}$$

Häufigkeit der Messwerte im Intervall dm

Häufigkeit aller Messwerte

So erhält man die Gauß-Funktion

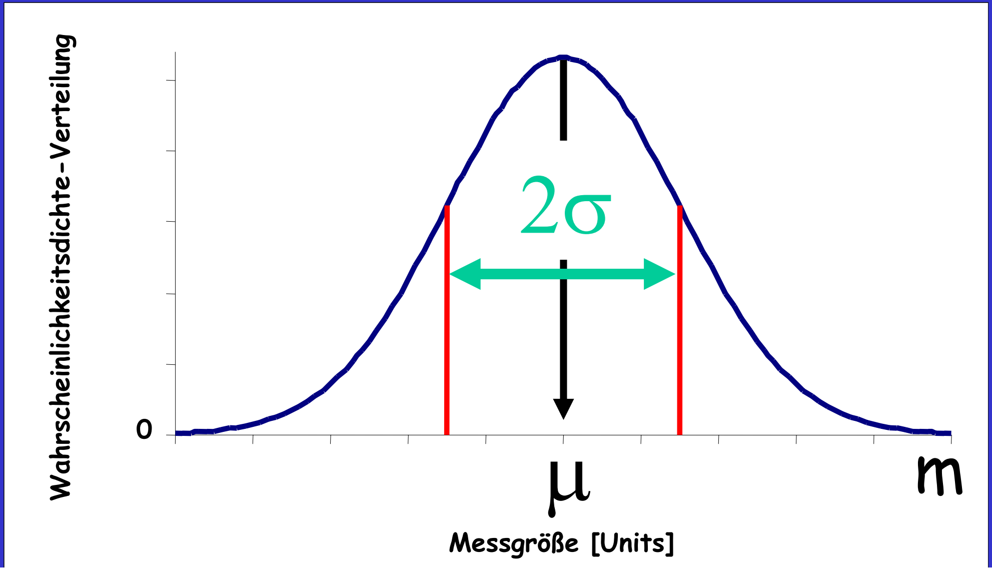
$$G(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Bernd Hitzmann

$$G(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ Mittelwert

σ Standardabweichung



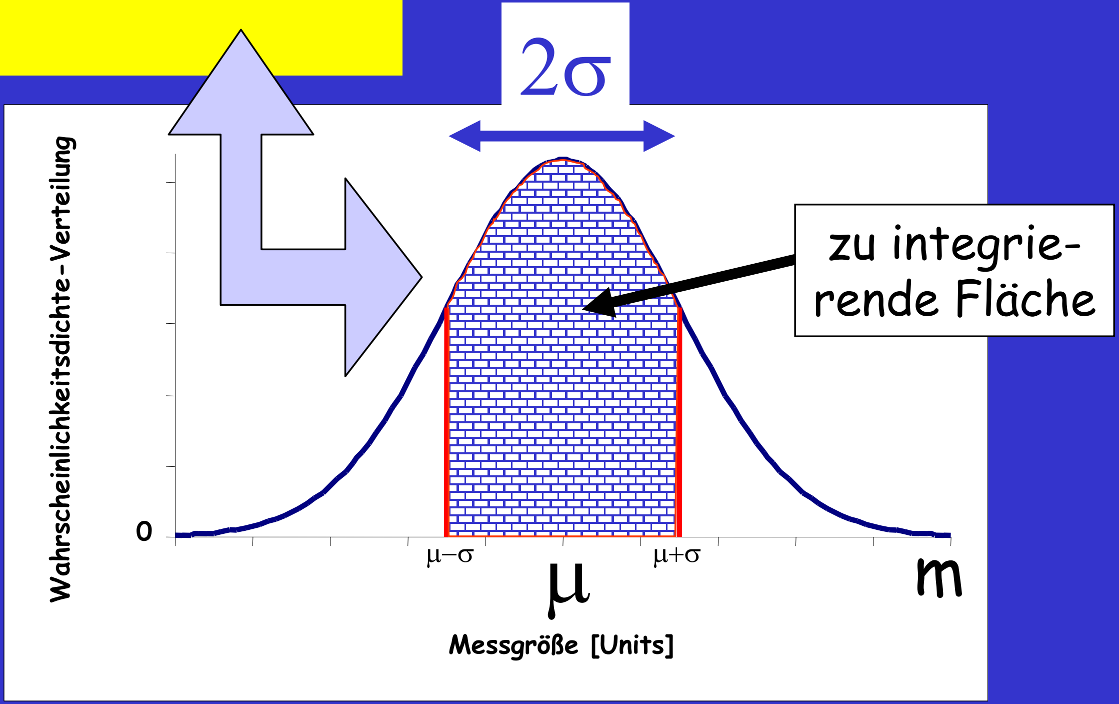
G(m) Wahrscheinlichkeits<u>dichte</u>-Verteilung

$G(m_i)dm =$ Wahrscheinlichkeit einen Messwert im Intervall $m_i \pm \frac{dm}{2}$ zu erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(m)dm = 1$$

Bernd Hitzmann

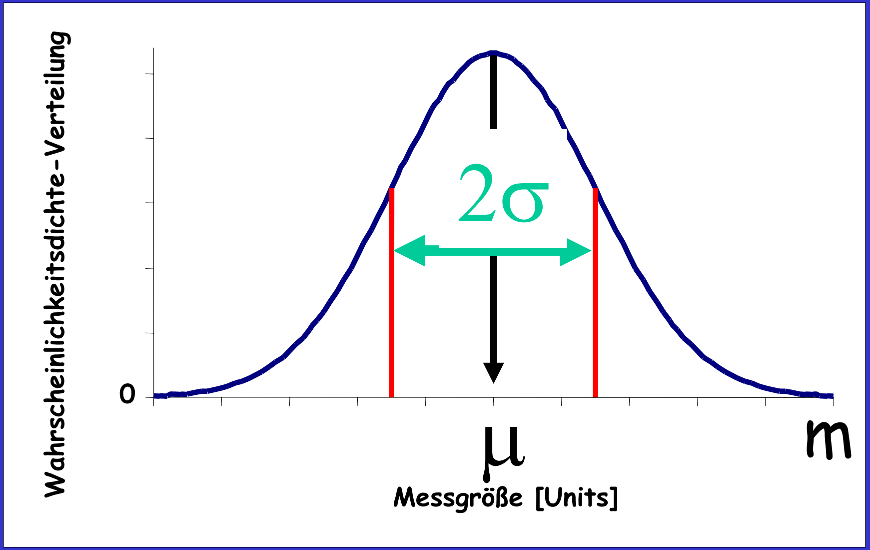
$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(m)\,dm = 0.6829$$



Normalverteilung vorausgesetzt:
68,29 % der Messwerte liegen im Bereich $\mu \pm \sigma$

Bernd Hitzmann

N_0 Gesamtzahl der Messwerte



$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_0 G(m)\,dm = N_0$$

Da $G(m_i)dm$ die Wahrscheinlichkeit ist einen Messwert im Intervall $[m_i-dm, m_i+dm]$ zu erhalten und N_0 die Gesamtzahl aller Messungen angibt, ist $N_0G(m_i)dm$ die Anzahl der Messwerte im Intervall $[m_i-dm, m_i+dm]$

Bernd Hitzmann

Mehrfachmessung (Stichprobe)

Messwerte
m_1
m_2
m_3
m_4
.
.
.
m_N

Schätzwerte einer Stichprobe:

Mittelwert:

$$\overline{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{N}$$

Standardabweichung:

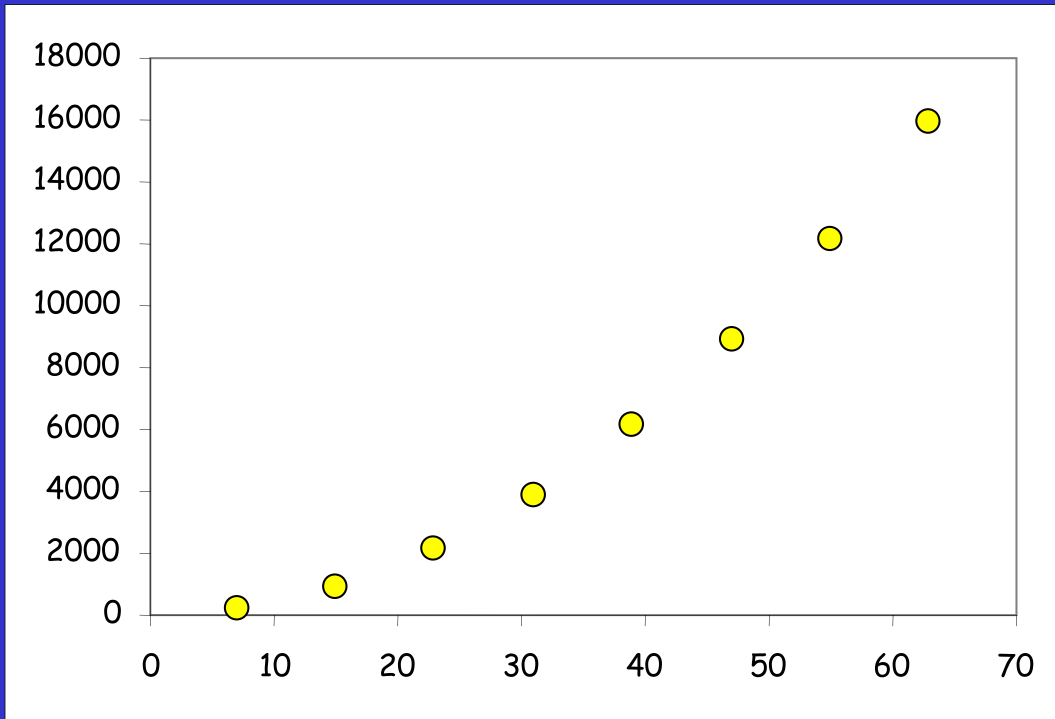
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\overline{m} - m_i)^2}{N-1}}$$

Varianz:

$$\mathrm{var} = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\overline{m} - m_i)^2}{N-1}$$

Bernd Hitzmann

Zurück zur eigentlichen Aufgabe:



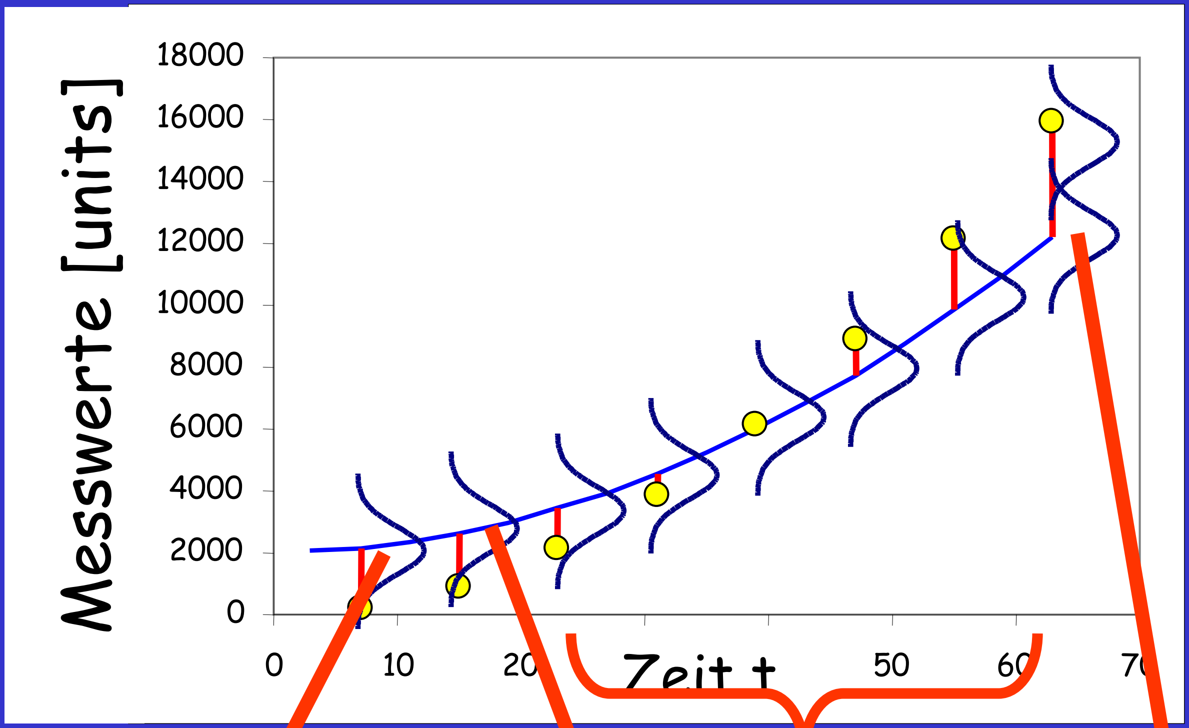
Zeit [min]	Messwerte
t_1	m_1
t_2	m_2
t_3	m_3
t_4	m_4
.	.
.	.
.	.
t_n	m_n

Funktion zur Beschreibung der Messwerte ist gesucht!

t_i=unabhäng. Variable

$m_i \approx f(t_i, a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots)$ a_j=Modellparameter

Annahme: $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3.......=\sigma_8=\sigma$



Wahrscheinlichkeit, dass das theoretische Modell die Messpunkte beschreibt:

$$W=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(m_1-f(t_1))^2}{2\sigma^2}}dm*\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(m_2-f(t_2))^2}{2\sigma^2}}dm*...*\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(m_8-f(t_8))^2}{2\sigma^2}}dm$$

$$W = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m_1 - f(t_1))^2}{2\sigma^2}} dm * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m_2 - f(t_2))^2}{2\sigma^2}} dm * \ldots * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m_8 - f(t_8))^2}{2\sigma^2}} dm$$

$$W = \prod_{i=1}^{8} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m_i - f(t_i))^2}{2\sigma^2}} dm$$

Wahrscheinlichkeit maximal

↕

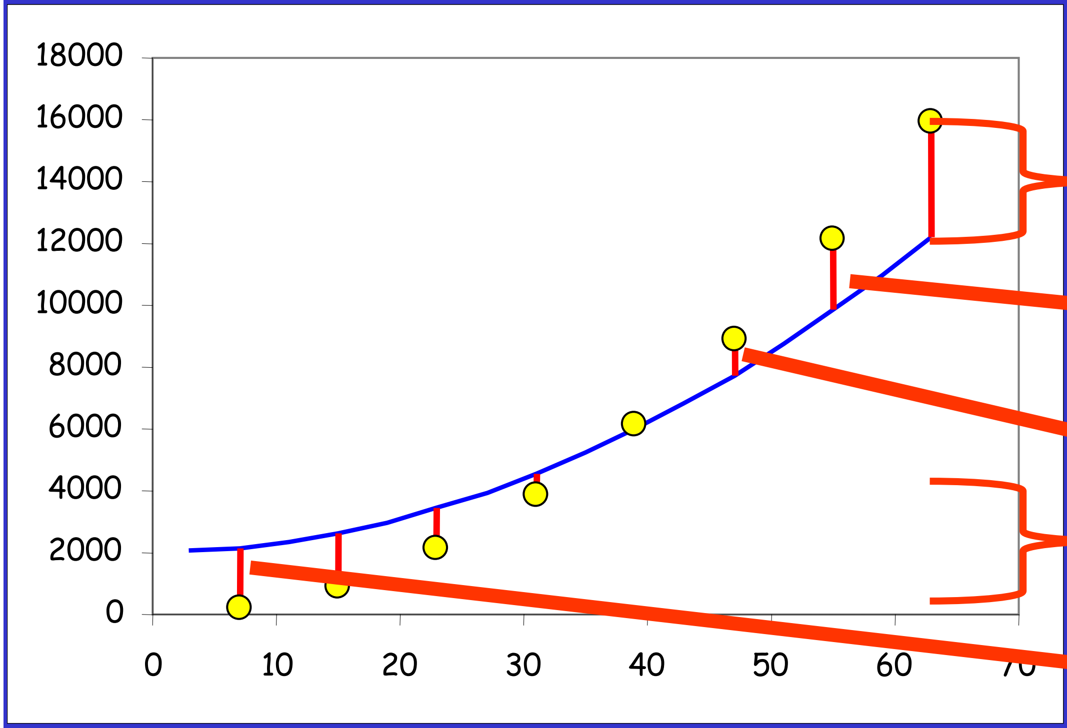
Fehlerquadratsumme minimal!

$$Fehlerquadratsumme = \sum_{i=1}^{8} (m_i - f(t_i))^2$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Bernd Hitzmann

Gauß: Methode der kleinsten Fehlerquadrate



$$[m_8-f(t_8)]^2$$
$$+[m_7-f(t_7)]^2$$
$$+[m_6-f(t_6)]^2$$
....
....
$$+[m_1-f(t_1)]^2$$

Summe

Gauß: Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$\text{Summe} = \sum_{i=1}^{8} [m_i - f(t_i)]^2$$

$$
\begin{array}{r}
[m_8 - f(t_8)]^2 \\
+[m_7 - f(t_7)]^2 \\
+[m_6 - f(t_6)]^2 \\
\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots \\
+[m_1 - f(t_1)]^2 \\
\hline
\text{Summe}
\end{array}
$$

$$\text{Summe}=\sum_{i=1}^{8}[f(t_i)-m_i]^2$$

Wovon hängt die Summe ab?

Zeit [min]	Messwerte
t_1	m_1
t_2	m_2
t_3	m_3
t_4	m_4
.	.
.	.
.	.
t_n	m_n

$$f(t_i) \approx f(t_i, a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots)$$

zum Beispiel:

$$f(t_i) = a_0 e^{-a_1 (t_i - a_2)^2}$$

Bernd Hitzmann

$$\text{Summe} = \sum_{i=1}^{8} [m_i - f(t_i)]^2$$

$$f(t_i) = a_0 e^{-a_1 (t_i - a_2)^2}$$

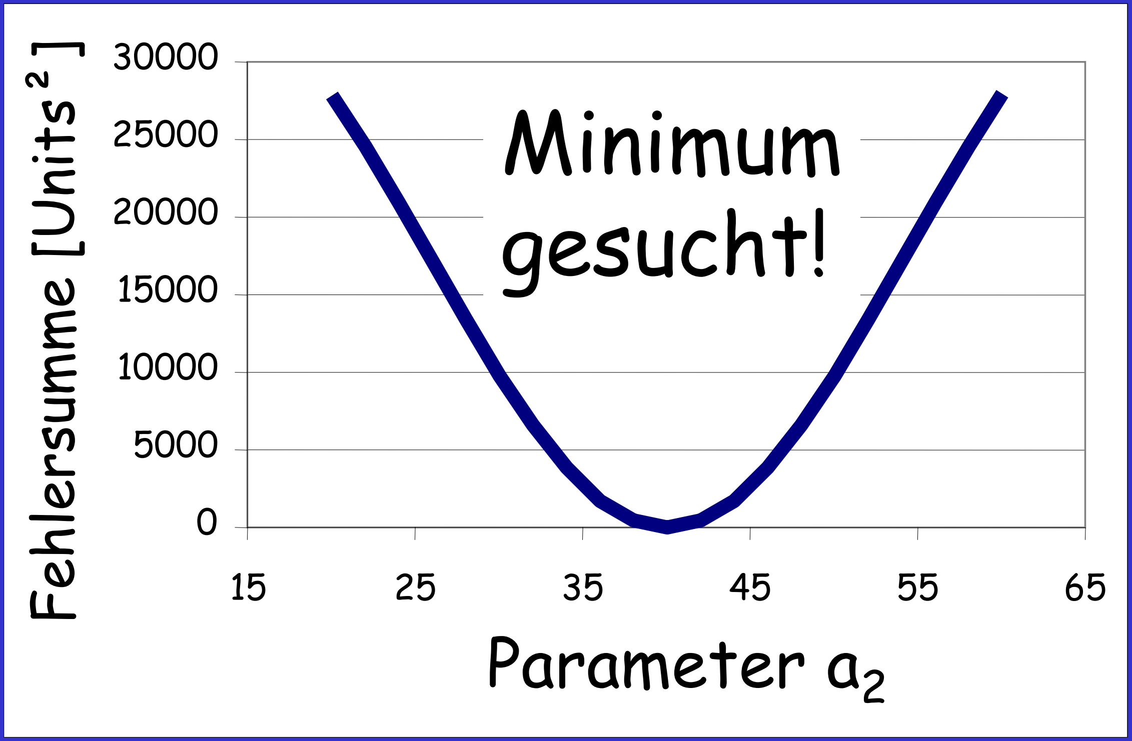
Zeit [min]	Messwerte
t_1	m_1
t_2	m_2
t_3	m_3
t_4	m_4
.	.
.	.
.	.
t_n	m_n

$$\begin{aligned} Summe = & \left[m_1 - a_0 e^{-a_1 (t_1 - a_2)^2}\right]^2 \\ & + \left[m_2 - a_0 e^{-a_1 (t_2 - a_2)^2}\right]^2 \\ & + \left[m_3 - a_0 e^{-a_1 (t_3 - a_2)^2}\right]^2 \\ & + \left[m_4 - a_0 e^{-a_1 (t_4 - a_2)^2}\right]^2 \\ & + \left[m_5 - a_0 e^{-a_1 (t_5 - a_2)^2}\right]^2 \\ & + \left[m_6 - a_0 e^{-a_1 (t_6 - a_2)^2}\right]^2 \\ & + \left[m_7 - a_0 e^{-a_1 (t_7 - a_2)^2}\right]^2 \\ & + \left[m_8 - a_0 e^{-a_1 (t_8 - a_2)^2}\right]^2 \end{aligned}$$

Die Summe ist eine Funktion von a_0, a_1 und a_2!

Bernd Hitzmann

Abhängigkeit vom Parameter a_2



Für die anderen Parameter gibt es eine ähnliche Abhängigkeit!

Das Minimum der Fehlerquadratsumme ist gesucht!

Es kann mit dem Newton-Verfahren berechnet werden!

Wenn $f(x_M)$ Minimum ist, dann ist $f'(x_M)=0$!