Das Euler-Verfahren

Ein Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen

Leonard Euler 1707-1783

Bernd Hitzmann

Gegeben: $DGL: \quad \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(t, y(t))$

$Anfangsbedingung: y(a) = \alpha$

Gesucht: Die unbekannte Funktion $y(t) = ...$

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, in der eine Funktion und ihre Ableitung(en) vorkommen.

Viele Prozesse in der Natur werden durch Differentialgleichungen (DGLs) beschreiben!

Die zeitliche (und auch örtliche) Änderung eines Prozesses hängt meist von den aktuellen Prozessgrößen selber ab!

Gegeben:

$$DGL: \quad \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(t, y(t))$$

$$Anfangsbedingung: y(a) = \alpha$$

Gesucht: *Die unbekannte Funktion* $y(t) = ...$

Beispiele:

$$\frac{dc(t)}{dt} = k = kc(t)^0 \rightarrow c(t) = kt + K \xrightarrow{c(t=0)=0} c(t) = kt$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = -kc(t) \rightarrow c(t) = Ke^{-kt} \xrightarrow{c(t=0)=c_0} c(t) = c_0 e^{-kt}$$

Bernd Hitzmann

Gegeben:

$$DGL: \quad \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(t, y(t))$$

$$Anfangsbedingung: \; y(a) = \alpha$$

Gesucht: *Die unbekannte Funktion* $y(t) = ...$

Beispiele:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$$

$$\xrightarrow[x'(t=0)=0]{x(t=0)=A} \quad x(t) = A \cos(\omega t)$$

Bernd Hitzmann

Gegeben: $DGL: \quad \dfrac{dy(t)}{dt} = \underline{y'(t)} = f(t, y(t))$

$Anfangsbedingung: y(a) = \alpha$

<u>Gesucht:</u> *Die unbekannte Funktion* $y(t) = \ldots\ldots$

Taylor: $y(t) \approx y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)$

t_0 Entwicklungspunkt

t_0=a

$$y(t) \approx y(a) + \underline{y'(a)}(t - a)$$

y'(a)=f(a,y(a))

$$y(t) \approx y(a) + f\big(a, y(a)\big)(t - a)$$

Bernd Hitzmann

Gegeben:

$$DGL: \quad \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(t, y(t))$$

$$Anfangsbed\,ingung: \; y(a) = \alpha$$

Gesucht:

$$Die \;\; unbekannte \;\; Funktion \;\; y(t) = ...$$

$$y(t) \approx y(a) + f\big(a, y(a)\big)(t - a)$$

Gilt nur, wenn (t-a) klein ist!

$$\Delta t = (t - a) \Leftrightarrow t = a + \Delta t$$

$$\boxed{y(a + \Delta t)} \approx y(a) + f\big(a, y(a)\big)\Delta t$$

$$y(a + 2\Delta t) \approx \boxed{y(a + \Delta t)} + f\big(\boxed{a + \Delta t}; \boxed{y(a + \Delta t)}\big)\Delta t$$

Bernd Hitzmann

Gegeben: $$DGL: \quad \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(t, y(t))$$

$$Anfangsbedingung: \ y(a) = \alpha$$

Gesucht: *Die unbekannte Funktion* $y(t) = ...$

$$\boxed{y(a+\Delta t)} \approx y(a) + f\big(a, y(a)\big)\Delta t$$

$$y(a+2\Delta t) \approx \boxed{y(a+\Delta t)} + f\big(a+\Delta t, \boxed{y(a+\Delta t)}\big)\Delta t$$

$$y(a+3\Delta t) \approx y(a+2\Delta t) + f\big(a+2\Delta t, y(a+2\Delta t)\big)\Delta t$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y(a+[i+1]\Delta t) \approx y(a+i\Delta t) + f\big(a+i\Delta t, y(a+i\Delta t)\big)\Delta t$$

Bernd Hitzmann

Gegeben: $DGL: \quad \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(t, y(t))$

$Anfangsbedingung: y(a) = \alpha$

Gesucht: $Die\ unbekannte\ Funktion\quad y(t) = ...$

$$y(a + [i+1]\Delta t) \approx y(a + i\Delta t) + f\big(a + i\Delta t, y(a + i\Delta t)\big)\Delta t$$

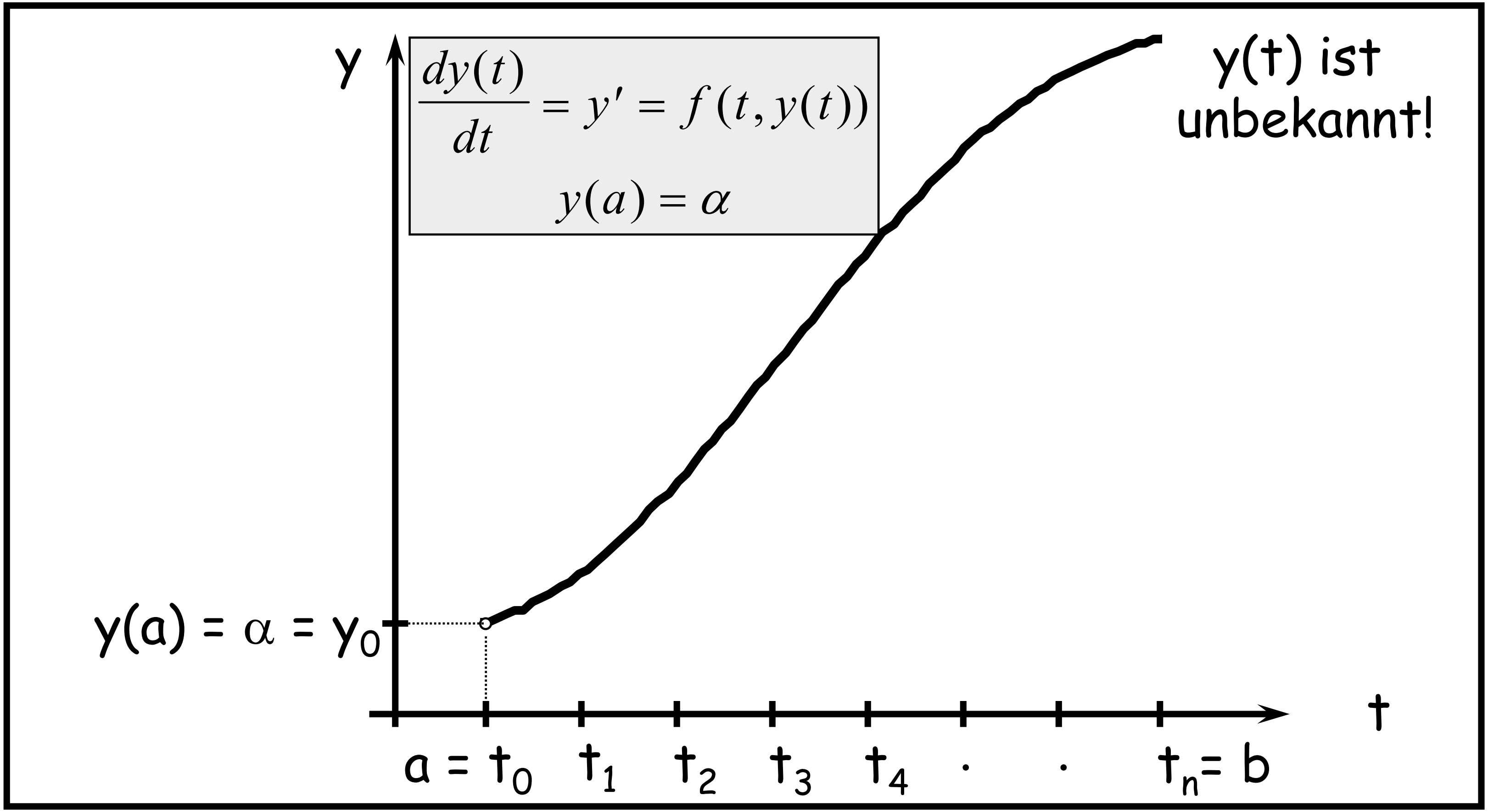
Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen

$y_0 = \alpha$ Anfangsbedingung

$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t \qquad t_{i+1} = t_i + \Delta t$

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



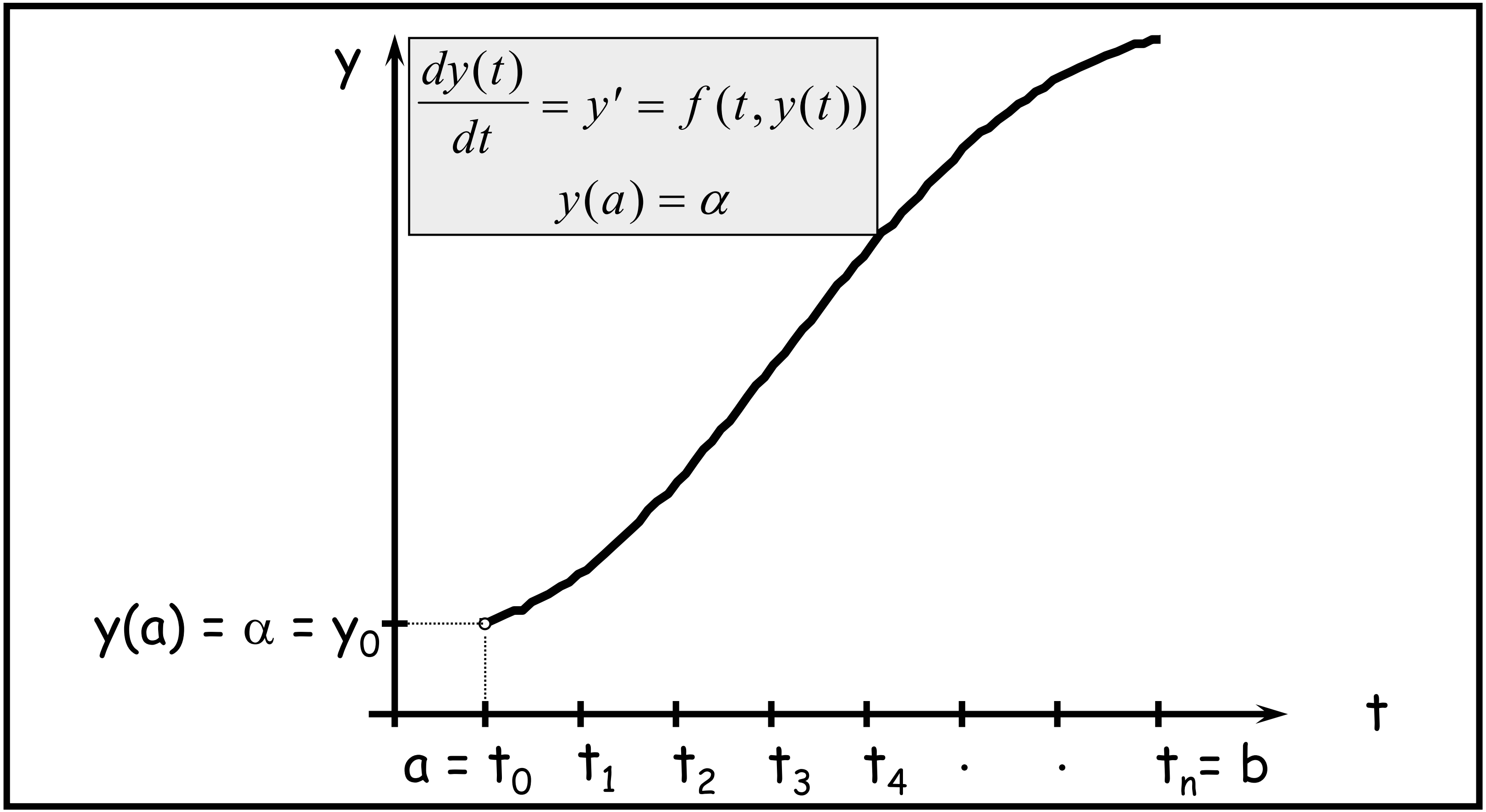
$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$

$$\boxed{\Delta t = t_{i+1} - t_i}$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



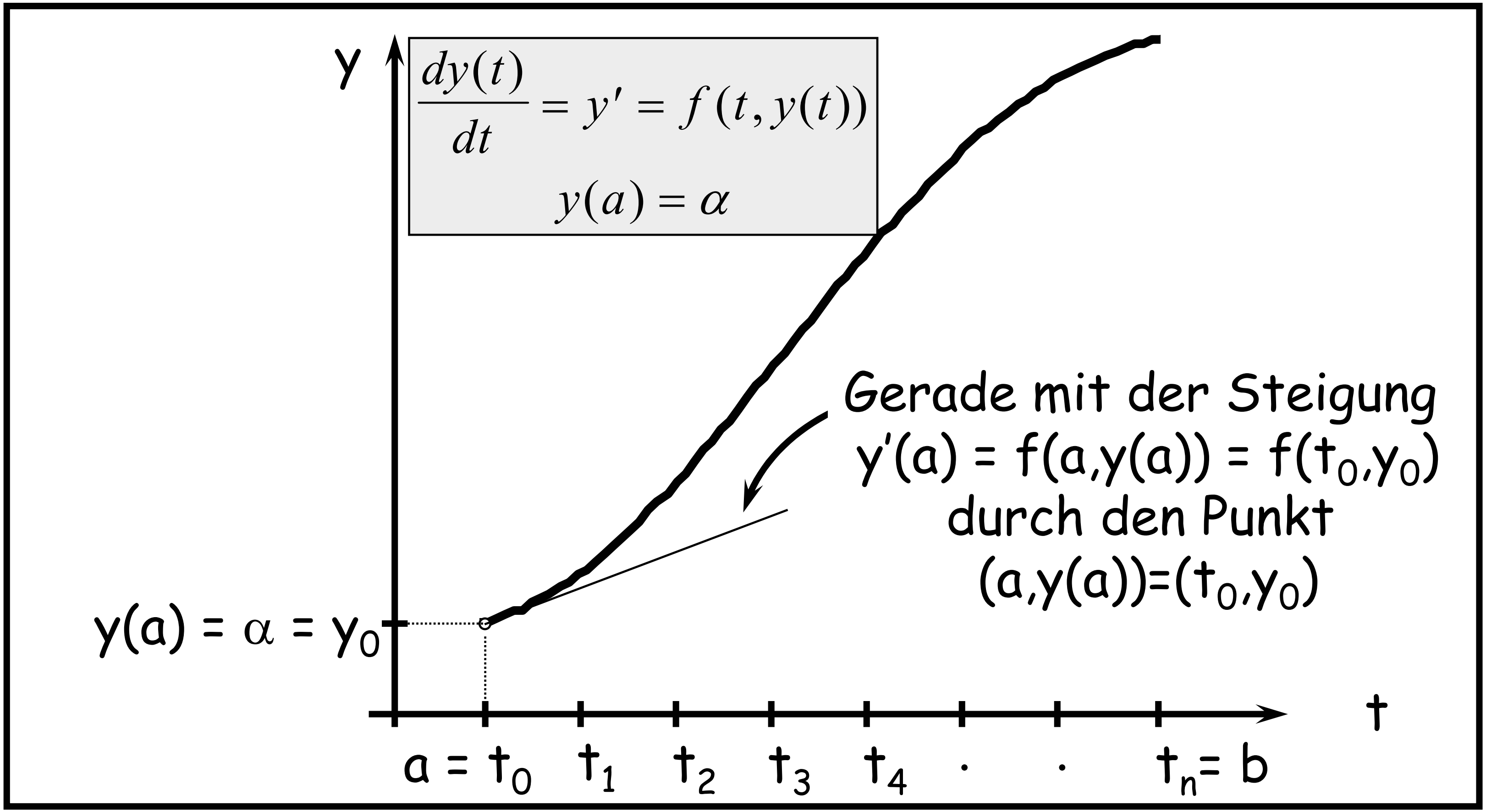
$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



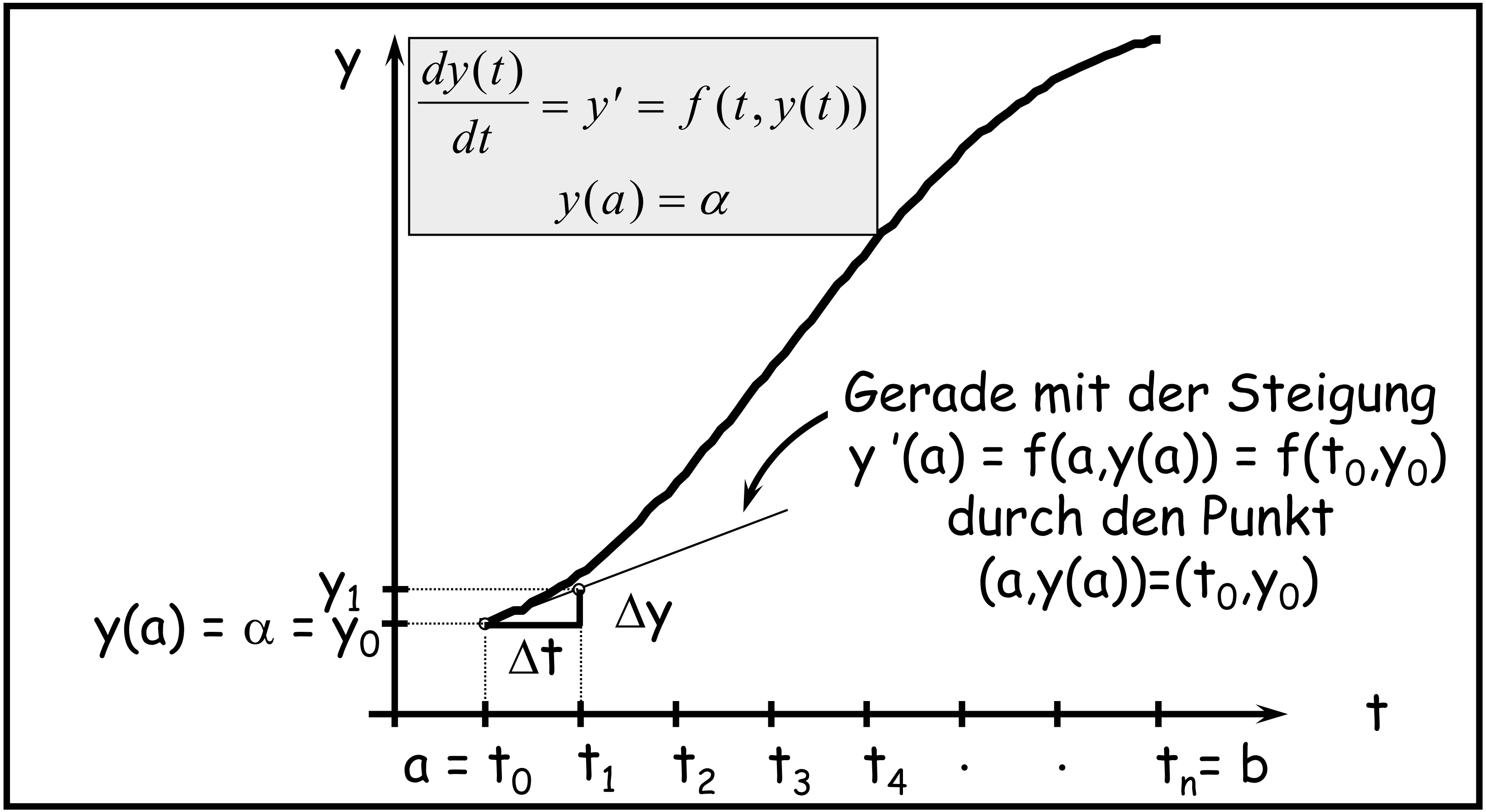
$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

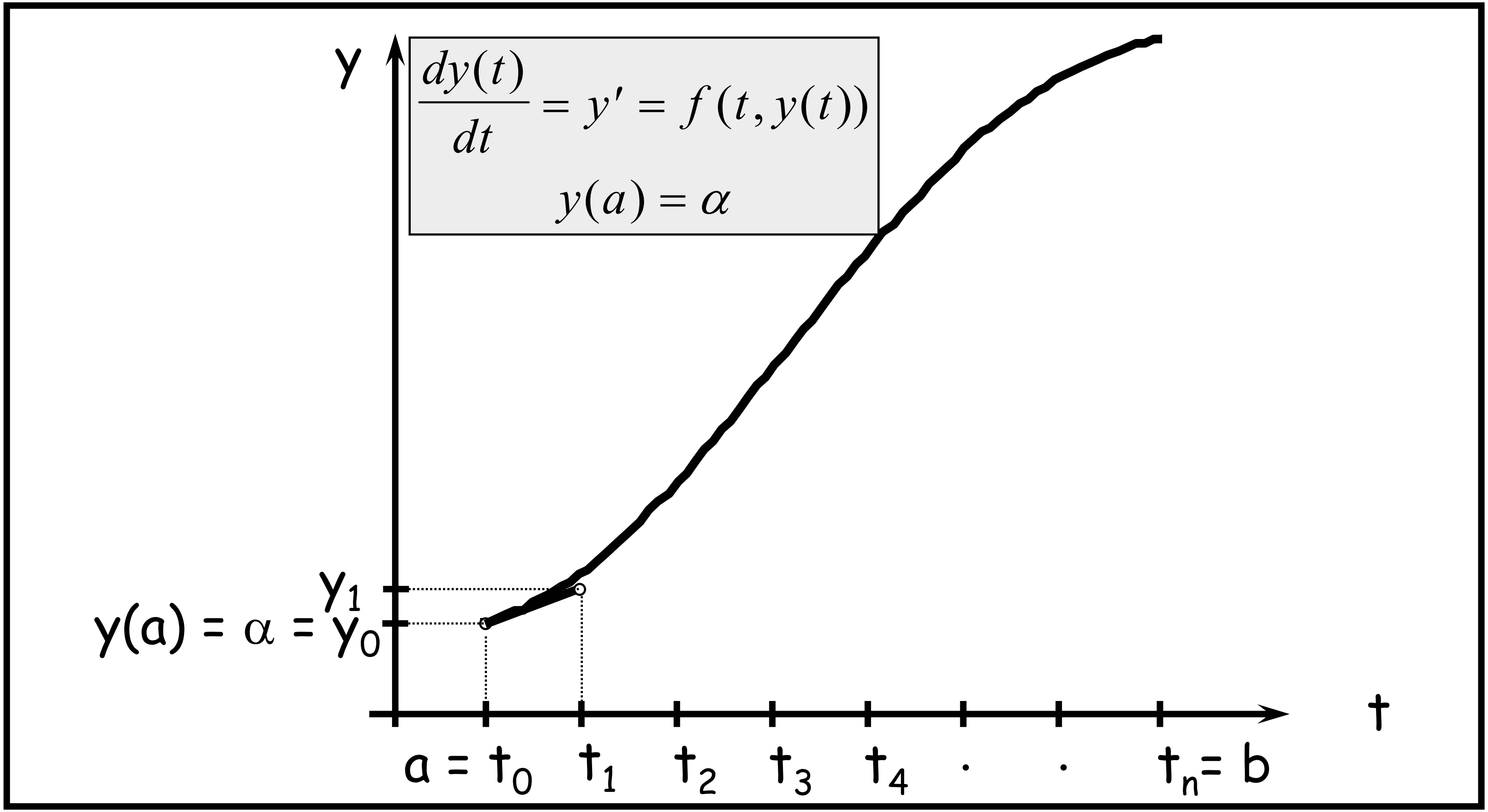
$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



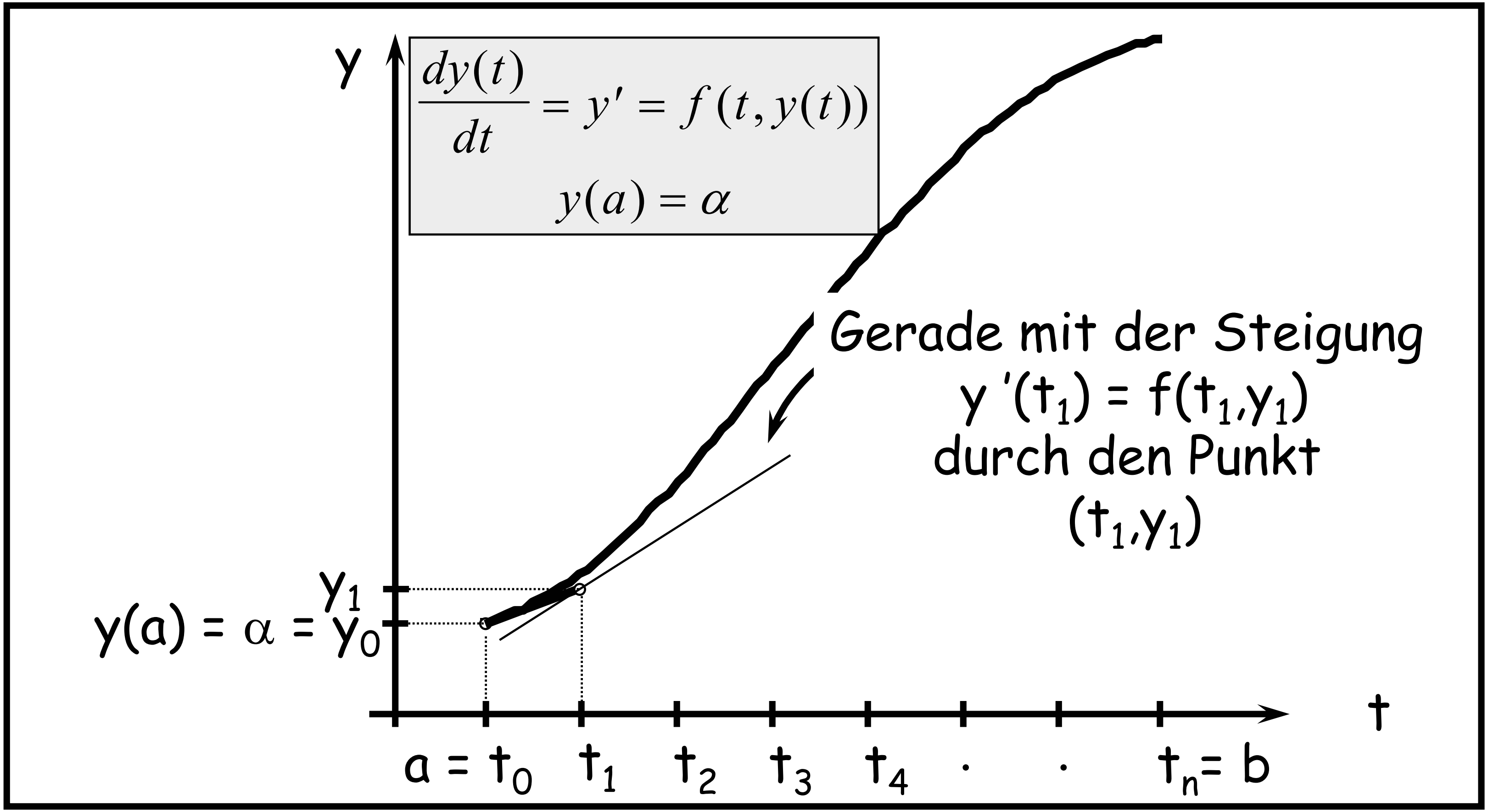
$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

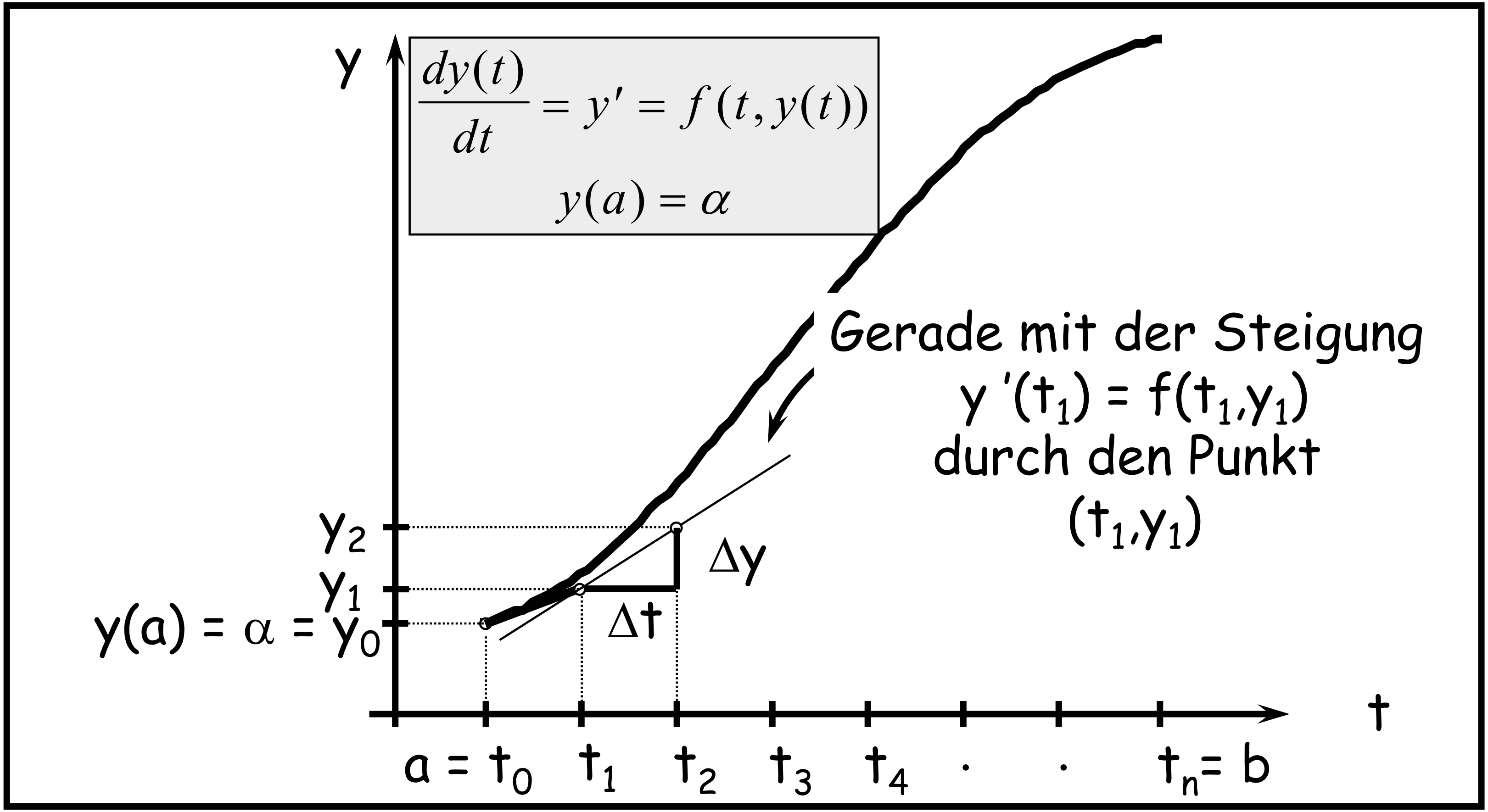
$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\Delta t$$

$$\boxed{\Delta t = t_{i+1} - t_i}$$

$$\boxed{t_2 = t_1 + \Delta t}$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

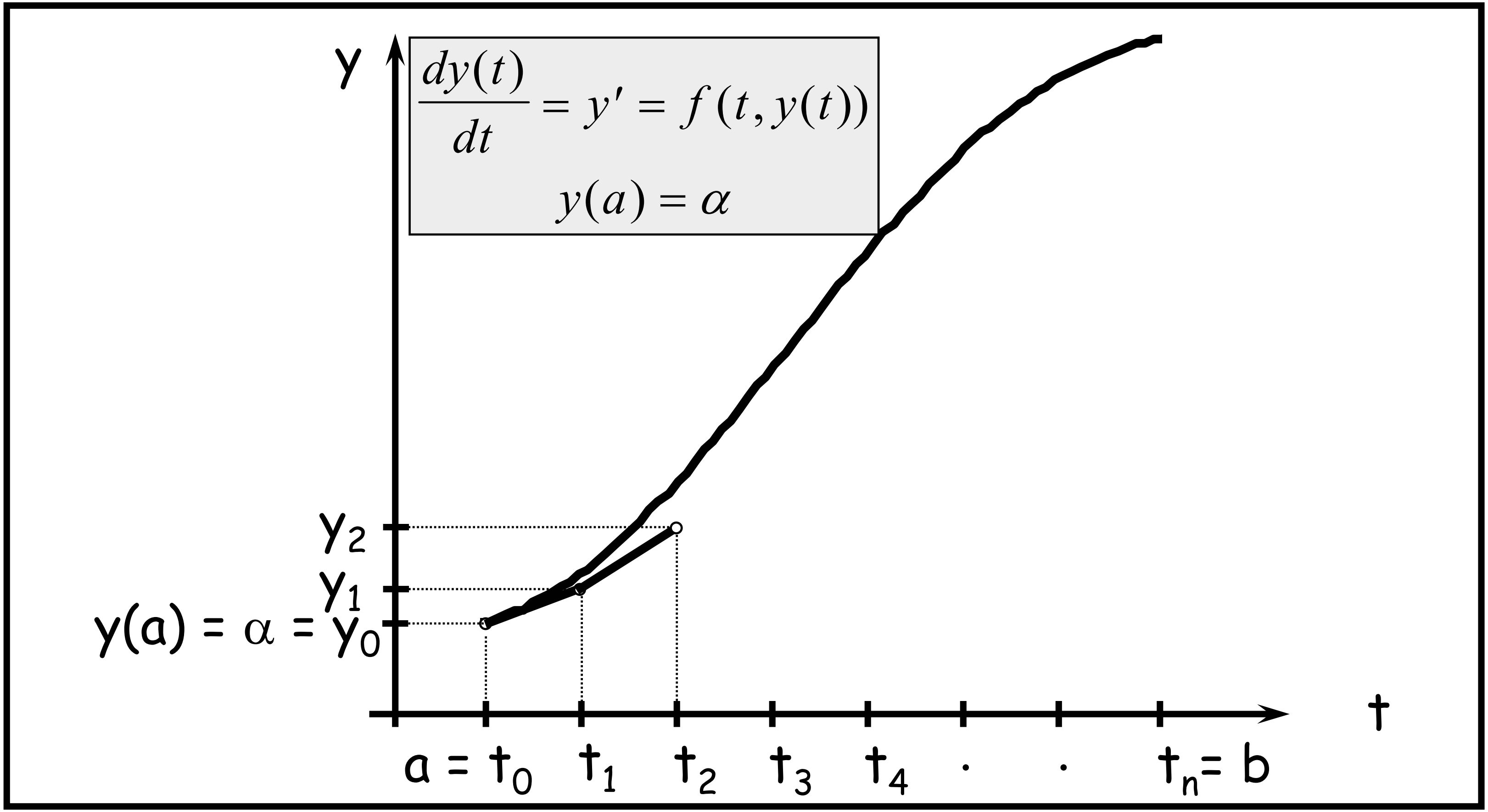
$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\Delta t$$

$$\boxed{\Delta t = t_{i+1} - t_i}$$

$$\boxed{t_2 = t_1 + \Delta t}$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL

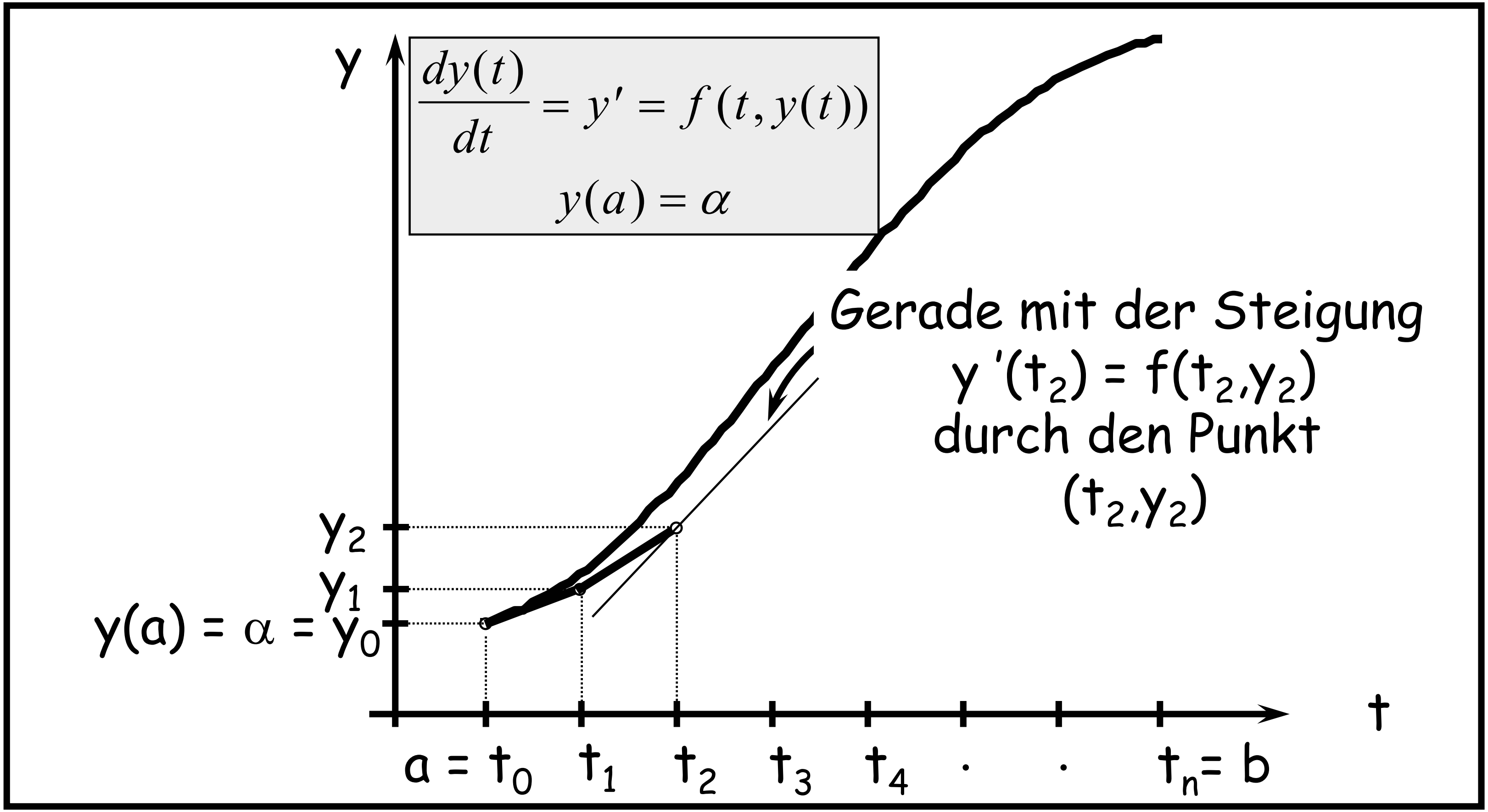


$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$
$$y_3 = y_2 + f(t_2, y_2)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



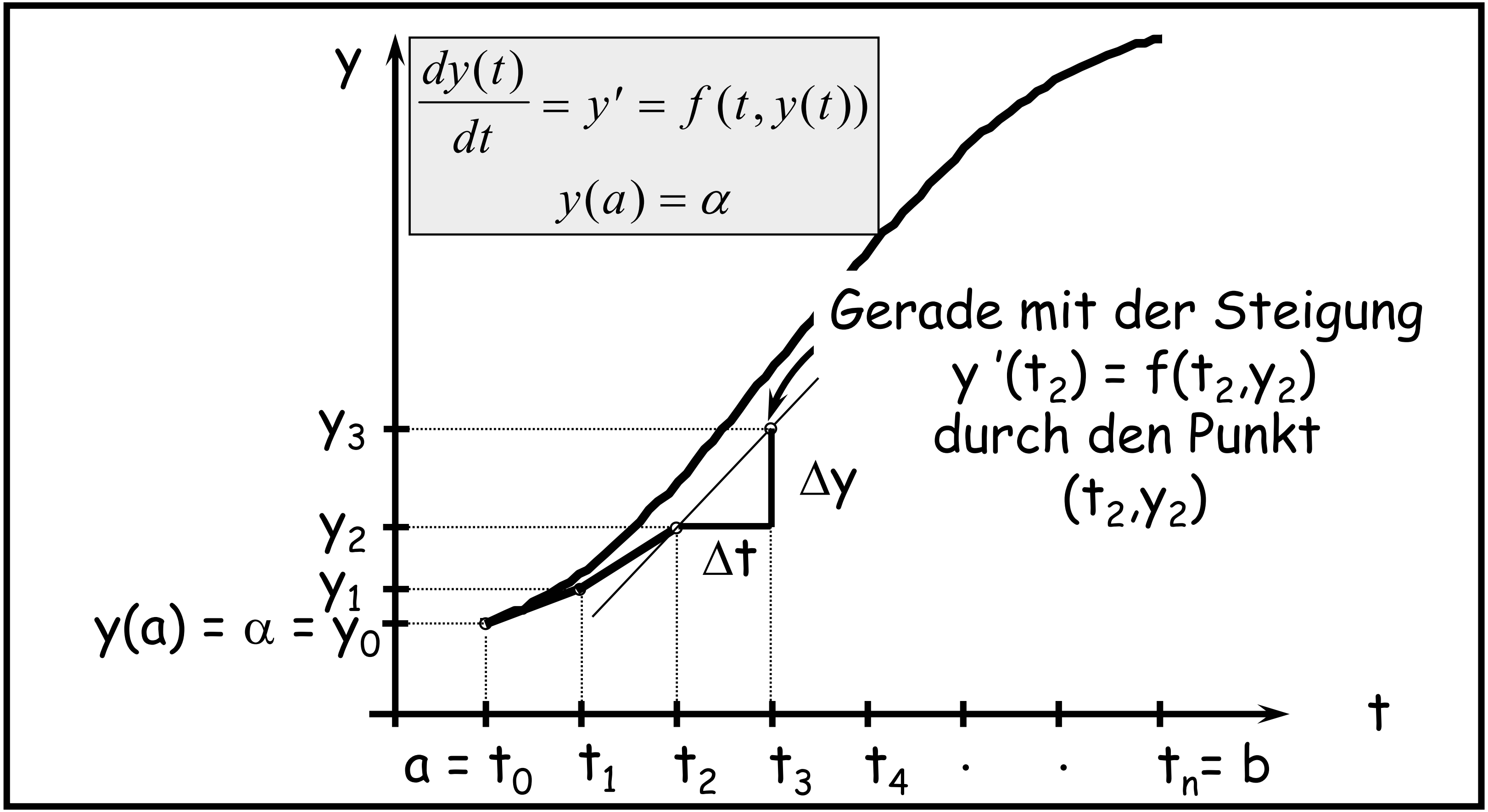
$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

$$y_3 = y_2 + f(t_2, y_2)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

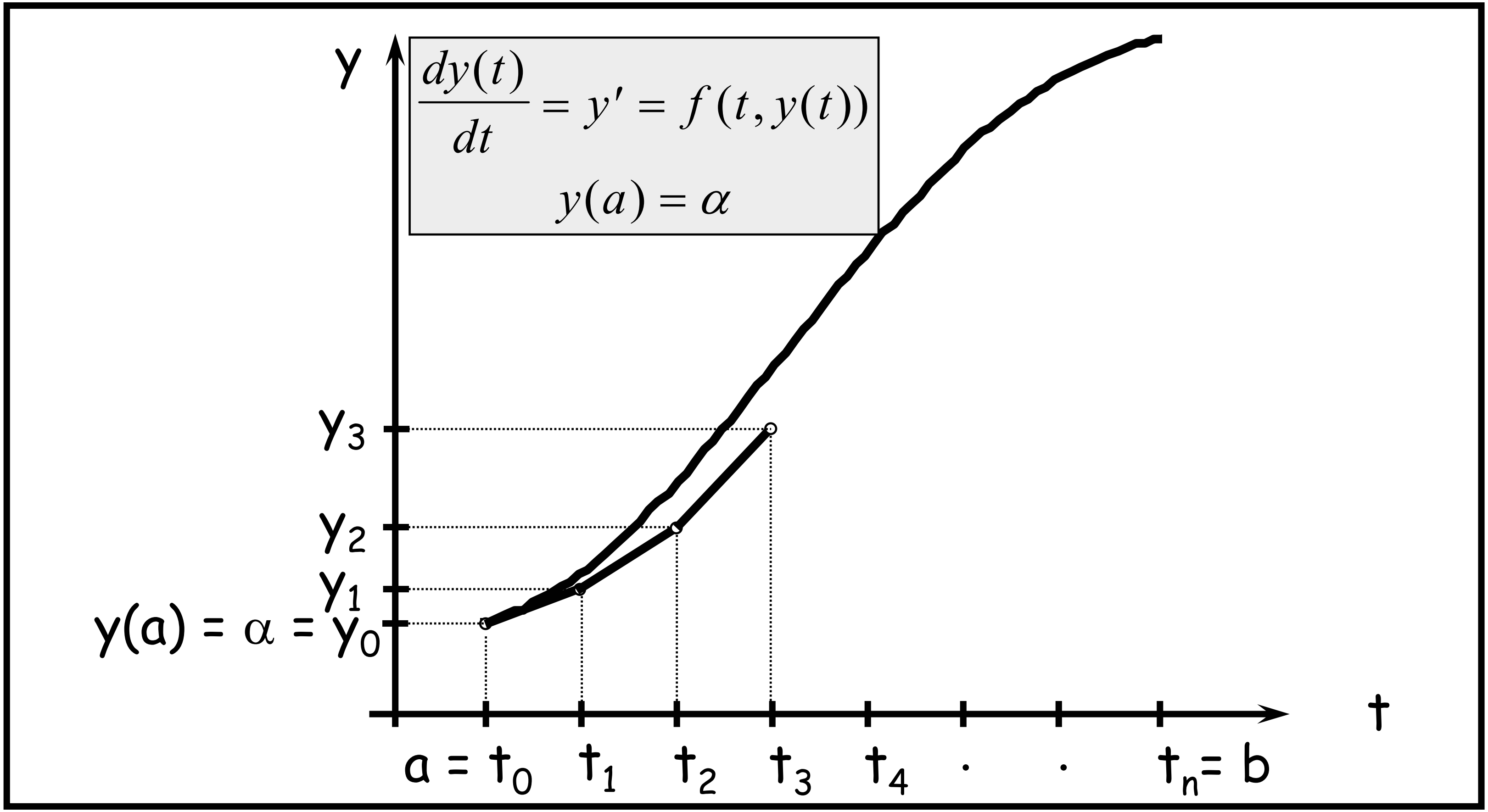
$$y_3 = y_2 + f(t_2, y_2)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

$$t_3 = t_2 + \Delta t$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL

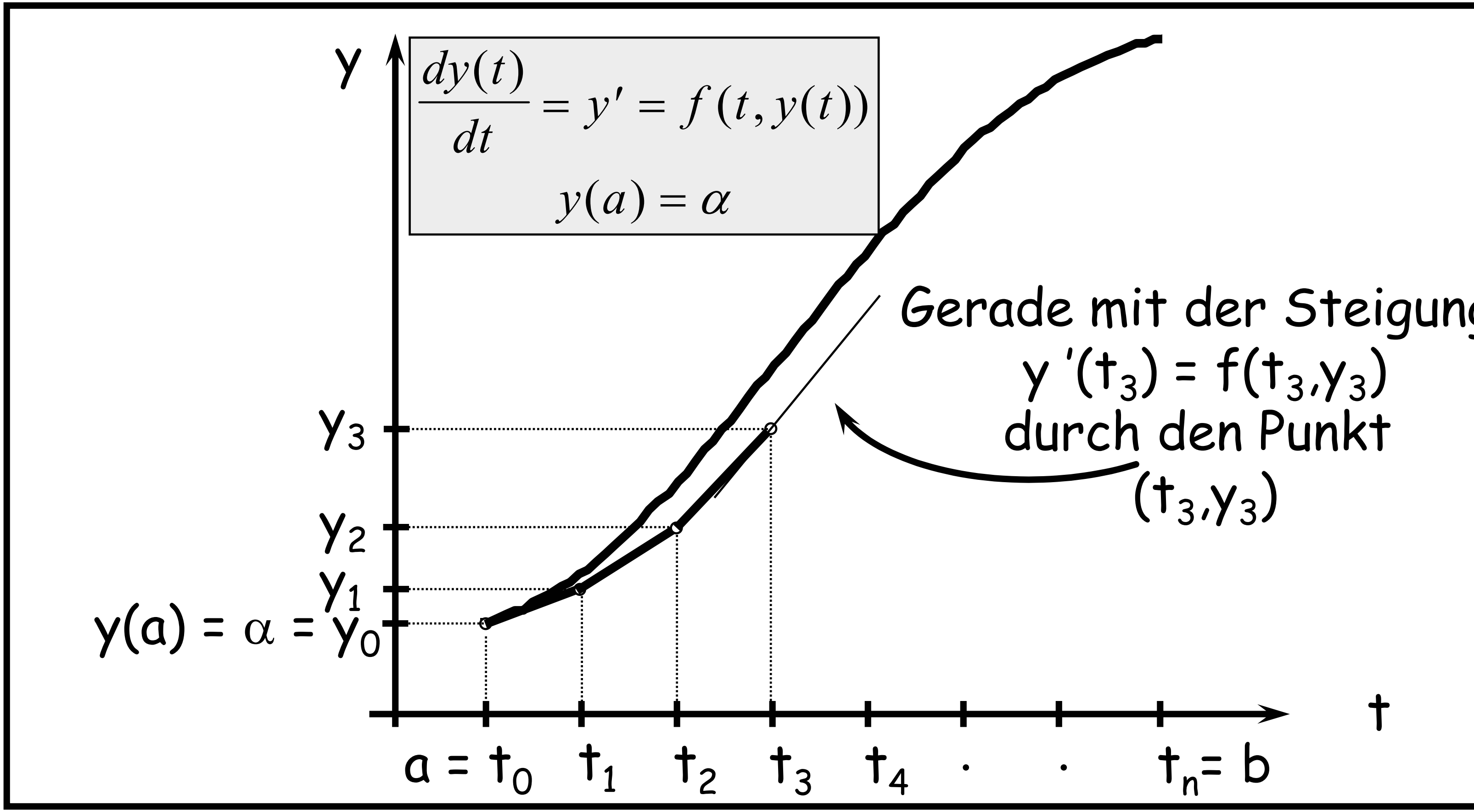


$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$
$$y_4 = y_3 + f(t_3, y_3)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



$$y(t+\Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

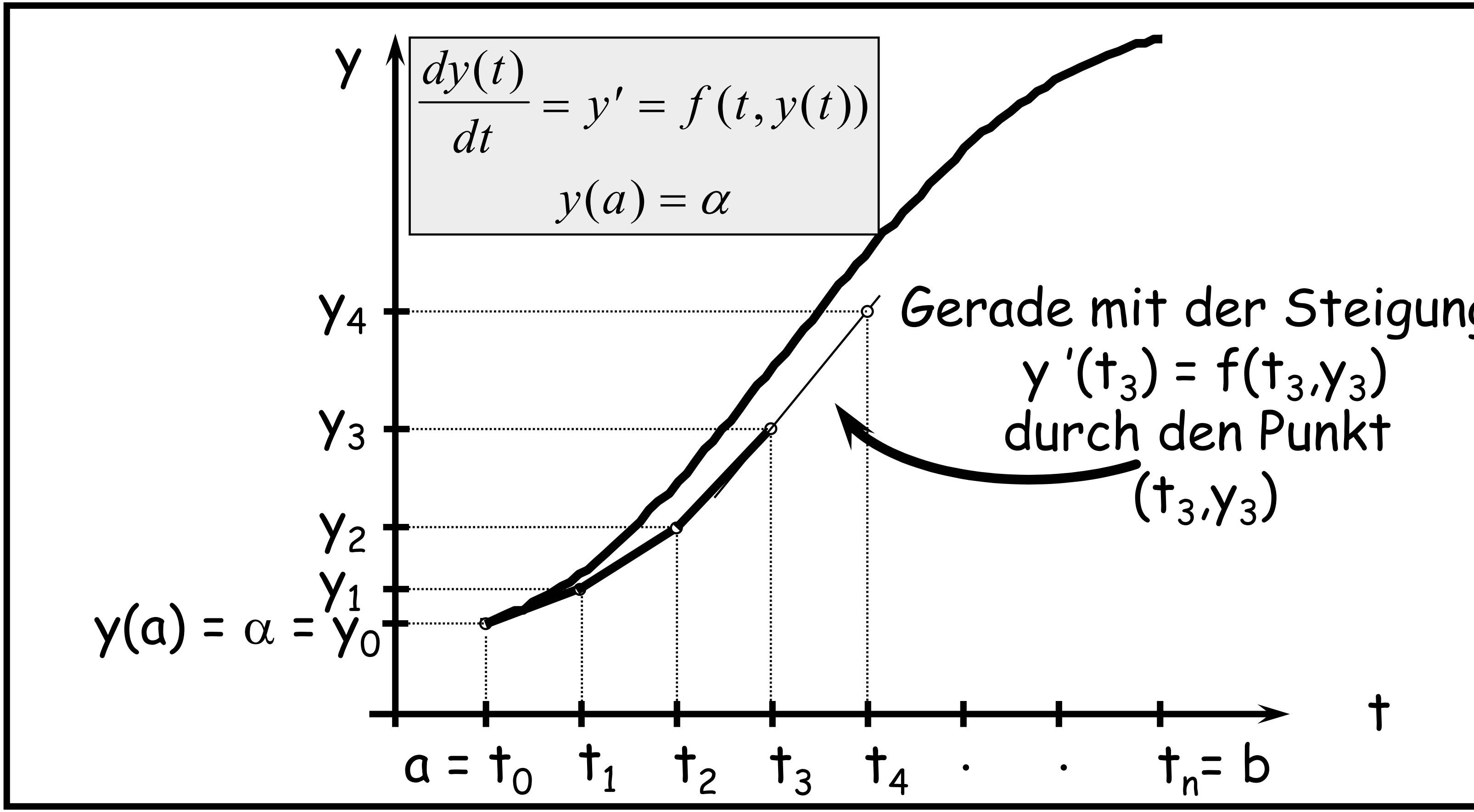
$$y_4 = y_3 + f(t_3, y_3)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

$$t_4 = t_3 + \Delta t$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

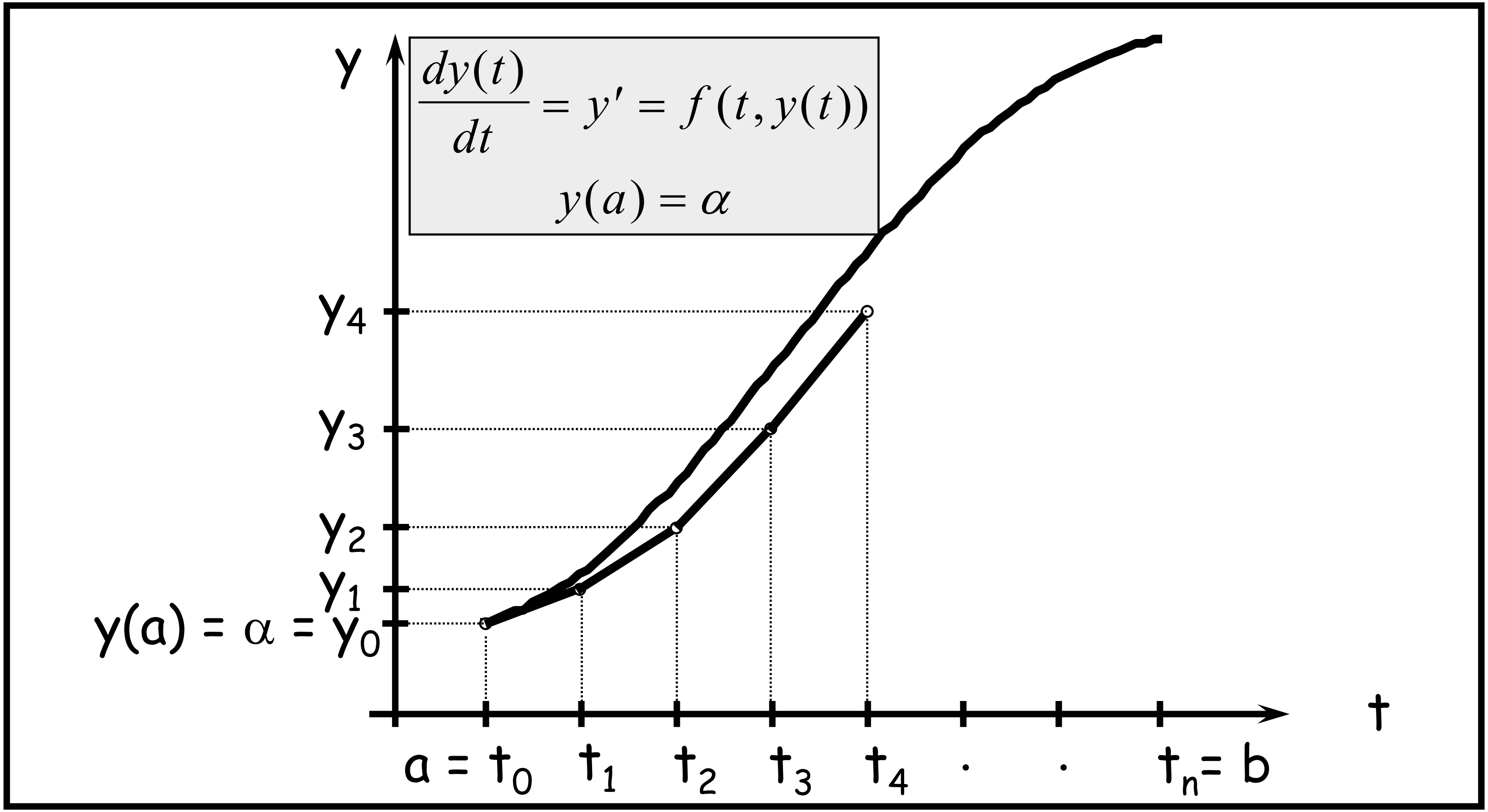
$$y_4 = y_3 + f(t_3, y_3)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

$$t_4 = t_3 + \Delta t$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

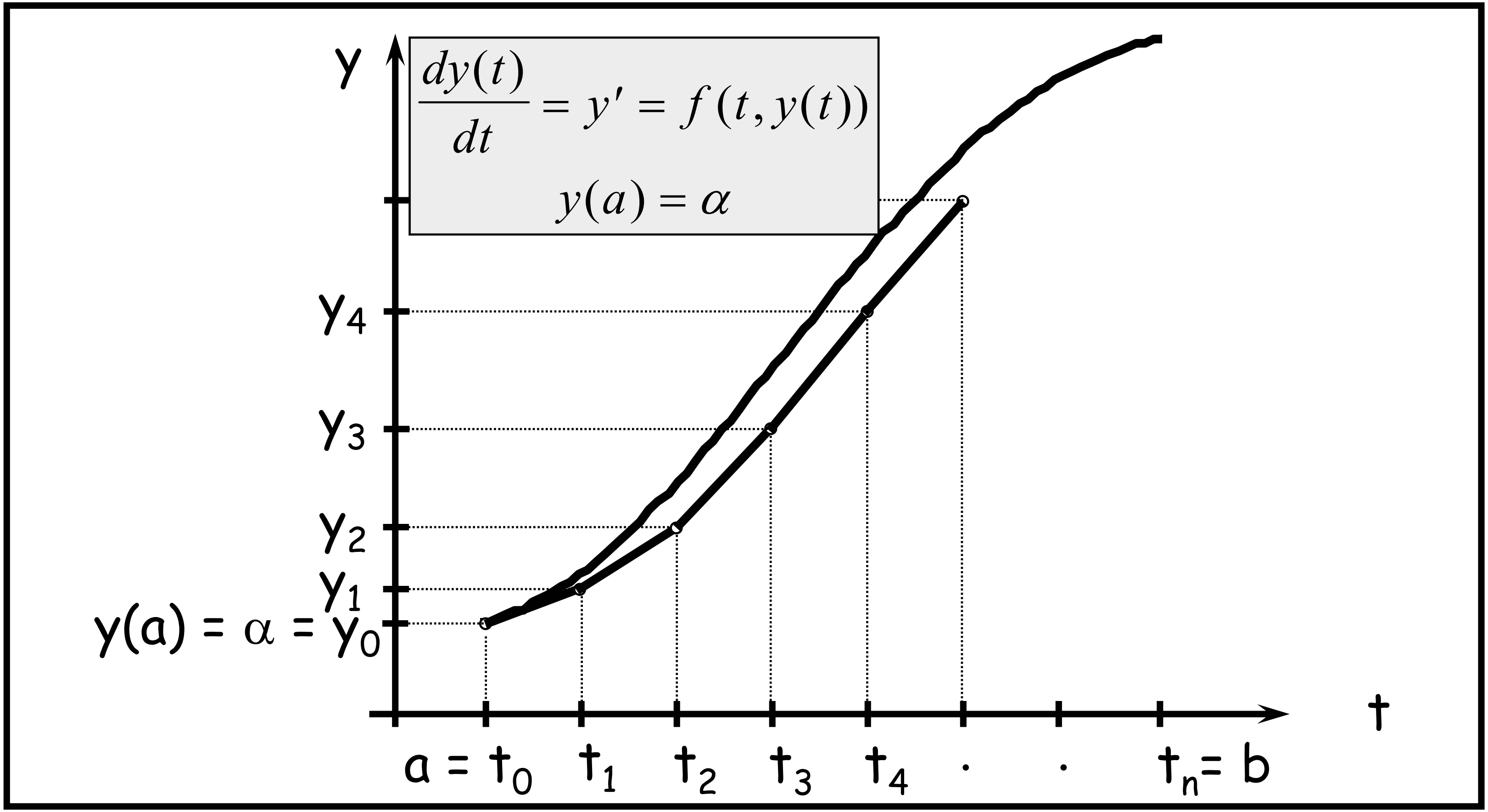
$$y_5 = y_4 + f(t_4, y_4)\Delta t$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

$$t_5 = t_4 + \Delta t$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



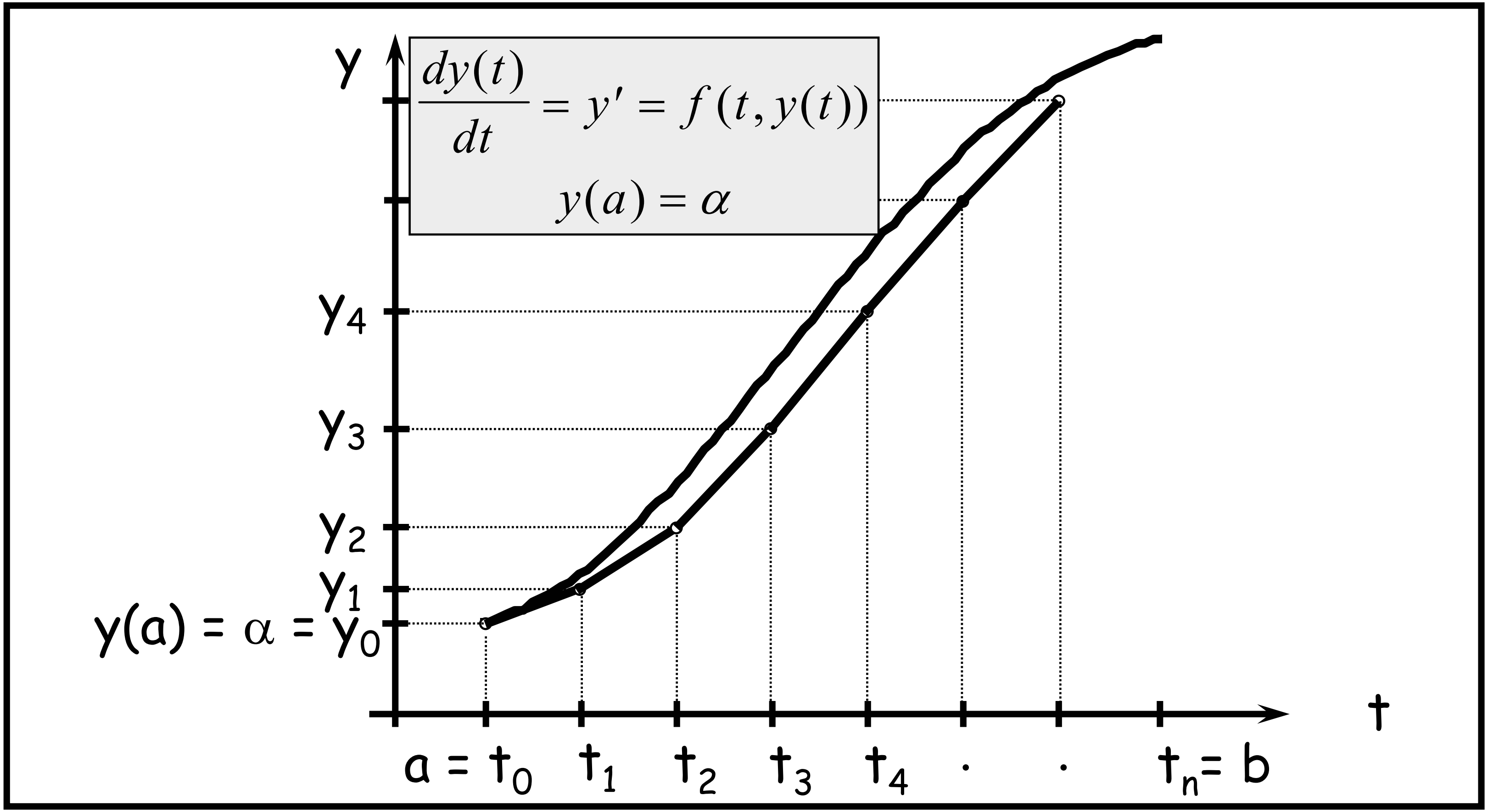
$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



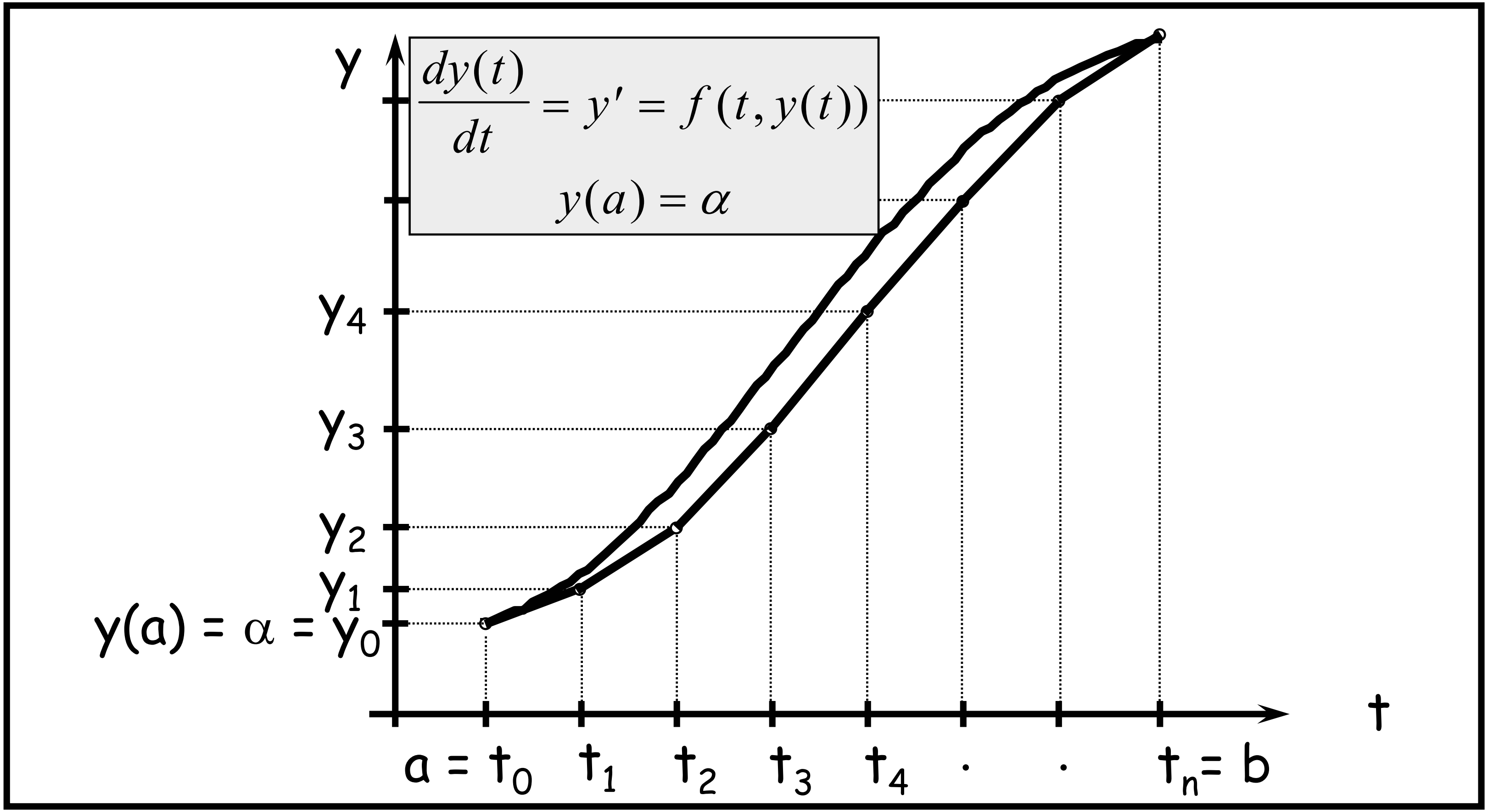
$$y(t+\Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



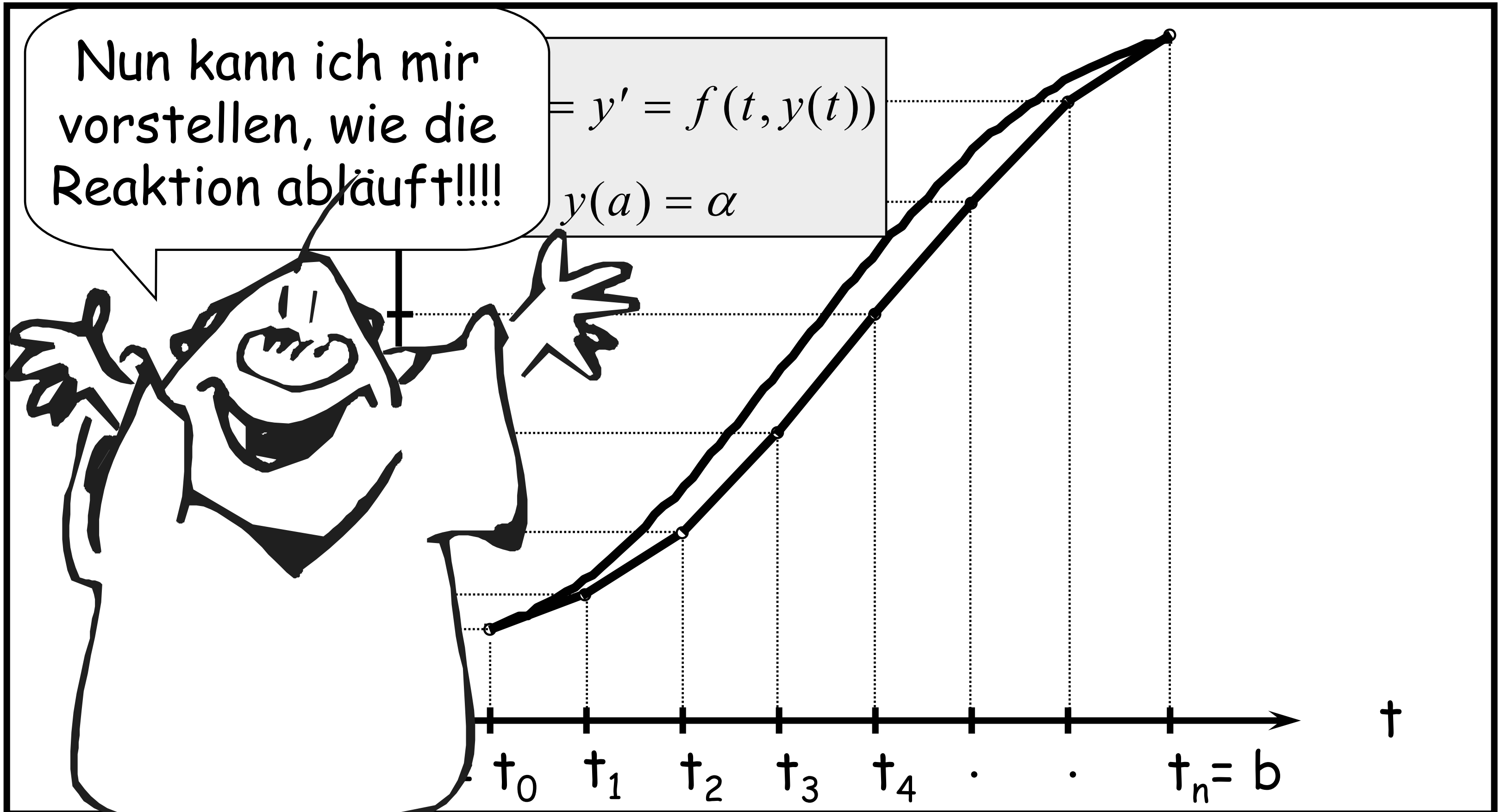
$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$

$$\boxed{t_{i+1} = t_i + \Delta t}$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL



$$y(t+\Delta t) = y(t) + f(t, y(t))\Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

Bernd Hitzmann

Das Euler-Verfahren zur Integration von DGL

Euler: $y_{i+1}=y_i+f(t_i,y_i)\Delta t$

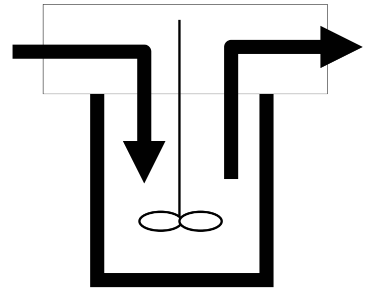
Bei Anwendung des Verfahrens muss man sich ein Δt wählen!

Achtung: Da sich dieses Verfahren aus der Taylor-Reihenentwicklung 1. Ordnung (lineare Näherung) ableitet muss Δt klein sein!

<u>Grobe Richtlinie:</u> Δt so wählen, dass gilt: $f(t_i,y_i)\Delta t \ll y_i$

Bernd Hitzmann

Anwendungsbeispiel:



idealer Rührkessel

$$\frac{dc(t)}{dt} = \underbrace{\frac{c_0 - c(t)}{\tau}}$$

Anfangsbedingung: c(t=0)=0

Analytische Lösung:

$$c(t) = c_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Numerische Lösung:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$c_{i+1} = c_i + \overbrace{f(t_i, c_i)}\Delta t = c_i + \left(\frac{c_0 - c_i}{\tau}\right)\Delta t$$

Bernd Hitzmann

Anwendungsbeispiel:

$$A \rightarrow B \rightarrow D$$

irreversible Reaktionen 1. Ordnung

Für Konzentration von B gilt:

$$\boxed{\frac{dc_B(t)}{dt} = \underbrace{c_A k_1 e^{-k_1 t} - k_2 c_B(t)}}$$

c_A, k_1 und k_2 sind Konstanten

$$\boxed{\frac{dc(t)}{dt} = f\big(t, c(t)\big)}$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$c_{i+1} = c_i + f(t_i, c_i)\Delta t = c_i + \left(c_A k_1 e^{-k_1 t_i} - k_2 c_i\right)\Delta t$$